

Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
 Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

February 8th, 2022
 WS 2021/22

Problem 15.1: Rabi-Oszillationen

↪ ID: ex_rabi_oszillationen:qm2122

Betrachte ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle = (1, 0)^T$ präpariert.

- Berechne die Zeitentwicklung des Systems mit dem Hamiltonian H .
- Berechne die Erwartungswerte $\langle\sigma_z\rangle$ und $\langle\sigma_x\rangle$ und zeichne sie als Funktion der Zeit t .
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Spin zur Zeit $t_1 = 3/(2\Omega)$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder im Zustand $|\downarrow\rangle$ befindet.
- Eine Messung zur Zeit t_1 hat ergeben, dass der Spin im Zustand $|\uparrow\rangle$ ist.
 In welchem Zustand ist der Spin zur Zeit $t_2 = 7/(2\Omega)$?

Problem 15.2: Unendlicher Potentialtopf mit δ -Potential

↪ ID: ex_unendlicher_potentialtopf_delta_potential:qm2122

Betrachte ein eindimensionales Teilchen im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < -a \\ V_0 \delta(x), & -a < x < a \\ \infty, & x > a \end{cases}. \quad (2)$$

- Wie lautet der Hamiltonoperator des Systems?
 Welche Vertauschungsrelationen erfüllen x und p ?
- Formuliere die Randbedingungen für die Wellenfunktion an den Punkten $x = -a$, $x = a$ und $x = 0$.
- Zeige, dass die asymmetrischen Wellenfunktionen $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x n}{a}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, Eigenzustände des Hamiltonians sind.
 Welches sind die dazugehörigen Eigenenergien?
- Bestimme die symmetrischen Lösungen und bestimme die Grundzustandsenergie.

Problem 15.3: Harmonischer Oszillator

↔ ID: ex_harmonischer_oszillator:qm2122

Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (3)$$

- a) Drücke den Aufsteigeoperator a^\dagger und den Absteigeoperator a mit Hilfe des Ortsoperators x und des Impulsoperators p aus.

Wie sieht der Hamiltonian in den neuen Operatoren aus?

- b) Berechne folgende Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger], \quad [x, a^\dagger], \quad [(a)^n, a^\dagger], \quad [H, x], \quad [H, p], \quad (4)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

- c) Gehe jetzt ins Heisenberg-Bild über. Wie sehen die Operatoren

$$a_H(t), \quad a_H^\dagger(t), \quad x_H(t), \quad p_H(t) \quad (5)$$

im Heisenberg-Bild aus.

- d) Wie sieht die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ aus.

Berechne die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ des ersten angeregten Zustandes durch Anwenden des Aufsteigeoperators.**Problem 15.4: Störungstheorie im Wasserstoffatom**

↔ ID: ex_stoerungstheorie_wasserstoffatom:qm2122

Ein Wasserstoffatom wird entlang der z -Achse durch ein harmonisches Potential

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = kz^2 \quad (6)$$

gestört.

- a) Berechne die Energiekorrektur des Grundzustandes in 1. Ordnung Störungstheorie.

- b) Betrachte jetzt den angeregten Zustand mit der Hauptquantenzahl $n = 2$.

Wie groß ist die Energieentartung?

Welche Quantenzahlen charakterisieren die Zustände?

- c) Die Störung führt zu einer Aufspaltung dieser Energieentartung. Treffe aufgrund von Symmetrieüberlegungen eine Aussage über die Aufspaltung der Entartung.

Welches sind die guten Quantenzahlen? (Begründung!)

Welcher Zustand wird durch die Störung zum Zustand mit der tiefsten Energie und welcher zum Zustand mit der höchsten Energie?

- d) Überprüfe die Aussagen aus der vorherigen Aufgabe durch explizites Ausrechnen.

Problem 15.5: Drehimpulsaddition

↔ ID: ex_drehimpulsaddition:qm2122

Betrachte ein Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 2$ (d-Welle) und einem internen Spin $s = \frac{3}{2}$.

- a) Wie groß ist die Dimension des Hilbertraumes?
Stelle eine natürliche Basis auf, die die Zustände beschreibt.
- b) Welches sind die erlaubten Werte j des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$?
- c) Was ist die Parität der Zustände?
- d) Der Hamiltonian des Systems ist nur durch die Spin-Bahn Kopplung $H = \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ gegeben.
Berechne die Eigenenergien des Systems und gebe die Entartung an.