

Aufgabe 8.1: Corioliskraft

[Mündlich | 2 Pkt(e)]

ID: ex_coriolis_force:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe soll der Einfluss der Corioliskraft auf einen fallenden Stein untersucht werden.

Wir betrachten einen Stein, der vom Stuttgarter Fernsehturm (Höhe: 217 m) fällt. Zu Beginn ist der Stein in Ruhe. Der Einfluss der Zentrifugalkraft ist gering und kann vernachlässigt werden. Stelle die Bewegungsgleichungen auf. Schreibe die Lösung als $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t) + \mathcal{O}(\Omega^2)$, wobei $\mathbf{r}_0(t)$ die Lösung ohne Corioliskraft ist und $\mathbf{r}_1(t)$ der Anteil der Lösung, der linear in der Winkelgeschwindigkeit der Erde Ω ist. Entwickle die Bewegungsgleichungen konsistent in der Winkelgeschwindigkeit. Wie weit weicht die Position des Steins, wenn er auf dem Boden aufkommt, vom freien Fall ab? Wie hängt das Resultat vom Breitengrad ab?

Aufgabe 8.2: Foucaultsches Pendel

[Schriftlich | 4 Pkt(e)]

ID: ex_foucault_pendulum:km25

Übungsziel

Mit einem foucaultschen Pendel kann die Erdrotation auf anschauliche Weise und ohne astronomische Beobachtungen nachgewiesen werden. In dieser Aufgabe soll die Bahnkurve des Pendels ermittelt werden.

Betrachte ein ideales Pendel der Länge l in einem Inertialsystem K , das mit einer kleinen Auslenkung oszilliert.

- a) Zeige, dass die Kraft, die auf die Pendelmasse wirkt, für kleine Auslenkungen geschrieben werden kann als $\mathbf{F} = -m\omega_p^2(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)$. Was ist ω_p ? 1 Pkt(e)

Berücksichtige nun die Erdrotation. Wir wollen die Bewegung des Pendels im Koordinatensystem K' einer Person auf der Erde bestimmen. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die z-Achse senkrecht auf der Erdoberfläche steht.

- b) Stelle die Bewegungsgleichung im rotierenden Koordinatensystem auf. Vergewissere dich hierfür, dass für realistische Pendellängen l die Winkelgeschwindigkeit des Pendels sehr viel größer ist als die Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Wie lang müsste das Pendel sein, damit die Winkelgeschwindigkeit des Pendels und die Rotationsgeschwindigkeit der Erde gleich groß sind? Nutze dies um zu zeigen, dass die Bewegungsgleichungen in erster Näherung folgende Form annehmen 1 Pkt(e)

$$\ddot{x} = 2\Omega_z \dot{y} - \omega_p^2 x, \quad (1a)$$

$$\ddot{y} = -2\Omega_z \dot{x} - \omega_p^2 y. \quad (1b)$$

Wie sieht Ω_z aus?

- c) Verwende den Ansatz $u_{\pm} = x \pm iy$ um die Bewegungsgleichungen für x und y zu entkoppeln und finde die allgemeinen Lösungen $u_{\pm}(t)$ der resultierenden Differentialgleichungen. Zeige, dass sich für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ folgende Lösung für x und y ergibt

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_z t) \cos(\omega_p t) + y_0 \sin(\Omega_z t) \cos(\omega_p t) - y_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \cos(\Omega_z t) \sin(\omega_p t) + x_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \sin(\Omega_z t) \sin(\omega_p t), \quad (2a)$$

$$y(t) = y_0 \cos(\Omega_z t) \cos(\omega_p t) - x_0 \sin(\Omega_z t) \cos(\omega_p t) + x_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \cos(\Omega_z t) \sin(\omega_p t) + y_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \sin(\Omega_z t) \sin(\omega_p t). \quad (2b)$$

- d) Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass das Pendel zu Beginn nur in x-Richtung ausgelenkt wird. Welche Werte nehmen $r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$ und $\Theta = \arctan(y(t)/x(t))$ zu den Zeitpunkten $t_n = \pi/\omega_p n$ mit $n \in \mathbb{N}$ an?

Betrachte nun ein Pendel am Nordpol. Skizziere die Bewegung des Pendels in der x - y -Ebene für $\Omega = \omega_p/6$. Markiere hierzu zunächst die Positionen des Pendels zu den Zeitpunkten t_n (Beachte die Vorzeichen von x und y !). Verbinde die eingetragenen Positionen anschließend in der richtigen Reihenfolge.

Erläutere qualitativ wie sich die Bewegung des Pendels ändert, wenn es anstatt am Nordpol in Stuttgart oder in Sidney steht.

Aufgabe 8.3: Zentrifugalregulator

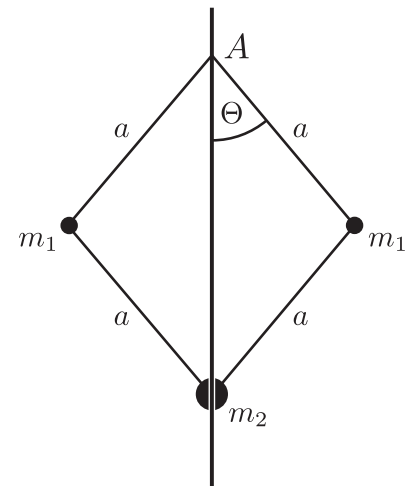
[Mündlich | 3 Pkt(e)]

ID: ex_centrifugal_governor:km25

Übungsziel

In dieser Übung üben wir den Lagrange-Formalismus mit generalisierten Koordinaten am konkreten Beispiel des Fliehkraftreglers. Dies ist ein weiteres Beispiel, bei dem sich Einschränkungen im Lagrange-Formalismus leicht umsetzen lassen.

Die im Bild gezeigte Anordnung dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale z -Achse im homogenen Gravitationsfeld mit der Fallbeschleunigung g . Die beiden Massen m_1 sind mit dem Fixpunkt A und mit der Masse m_2 über masselose Stäbe der Länge a verbunden. Der Winkel Θ ist variabel, ebenso der Winkel, unter dem die beiden Stäbe mit den Massen m_1 verbunden sind. Die Masse m_2 kann sich entlang der z -Achse frei bewegen.



- Wähle Θ als verallgemeinerte Koordinate und finde die Lagrangefunktion. Ist die Energie H erhalten? 1 Pkt(e)
- Bestimme das effektive Potential des Systems. 1 Pkt(e)
- Untersuche die Stabilität der stationären Lösungen ($\Theta = \text{const.}$). Ab welcher kritischen Winkelgeschwindigkeit ω_c bewegen sich die Massen m_1 von der z -Achse nach außen? Bei welchem Winkel Θ befindet sich ihr stabiler Zustand? 1 Pkt(e)