Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

29. April 2025
SS 2025

Aufgabe 4.1: Noether Theorem

[**Schriftlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_noether_theorem_en2:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe wenden wir das Noether-Theorem auf einen Galilei-Boost an. Für dieses Beispiel unterscheiden sich die transformierten Lagrange-Funktionen um eine totale Ableitung, welche einen zusätlichen Term in der invarianten Größe ergibt.

a) Die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens ist $L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2$. Führe einen Galilei-Boost $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + s\boldsymbol{v}t$ aus und bestimme die neue Lagrange-Funktion. Zeige, dass diese sich nur um eine totale Ableitung dF/dt von der ursrpünglichen Lagrange Funktion unterscheidet. **1** Pkt(e)

b) Ändert eine Transformation die Lagrange-Funktionen nur um eine totale Ableitung **1** Pkt(e)

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = L'(h^i, \dot{h}^i, t) = L(h^i, \dot{h}^i, t) + \frac{d}{dt}F(h^i, t),$$

mit h^i den transformierten Koordinaten, dann stimmen die Euler-Lagrange-Gleichungen von L und L' überein. Der Galilei-Boost aus a) ist eine solche Symmetrie der Bewegungsgleichungen. Das Noether-Theorem nun die Erhaltungsgröße

$$I(q^i, \dot{q}^i, t) = \left[\sum_j \left(\frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(h^i, t, s)}{\partial s}\right) - \frac{\partial F(h^i, t, s)}{\partial s}\right]_{s=0}.$$

Bestimme diese für das freie Teilchen aus a) und zeige, dass die Erhaltungsgröße in einer geradlinigen Bewegung resultiert. Folgt allgemein aus der Invarianz der Bewegungsgleichungen unter Galilei-Boosts immer eine geradlinige Bewegung?

c) Beweise das Noether-Theorem für Transformationen die die Lagrange-Funktion um eine totale Ableitung ändern. **1** Pkt(e)

Hinweise: Vergewissere dich, dass weiterhin

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s}\right]_{s=0}$$

gilt, wie in dem Beweis aus der Vorlesung. Bestimme dann dI/dt.

Aufgabe 4.2: Erhaltungsgrößen

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_conserved_quantities:km25

Übungsziel

Energie, Impuls und Drehimpuls sind die wichtigsten und häufigsten Erhaltungsgrößen die in physikalischen Systemen auftreten. In dieser Aufgabe üben Sie, wie Sie diese Erhaltungsgrößen aus der Form von Potentialen ablesen können.

Bestimme für die folgenden Fälle, ob Energie, Impuls oder Drehimpuls erhalten sind. Gebe zudem an, für welche Raumrichtung Impulserhaltung bzw. um welche Drehachsen Drehimpulserhaltung gilt. Hierbei sind $g, D, w > 0$ gegebene Konstanten.

a) Ein Teilchen befindet sich in einem externen Kraftfeld, das durch das Potential $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ beschrieben wird. **1** Pkt(e)

   I) $\phi(\boldsymbol{r}, t) = mgz$

   II) $\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}D\cos(\omega t)\boldsymbol{r}^2$

b) Zwei Teilchen 1 und 2 der selben Masse üben aufeinander eine Kraft mit dem Wechselwirkungspotential $\phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)$ aus. Es gibt kein externes Kraftfeld. Mit Impuls und Drehimpuls ist hier jeweils der Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls gemeint: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$. **1** Pkt(e)

   I) $\phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \frac{1}{2}D\exp(-\omega t)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2$

   II) $\phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \frac{1}{2}D(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)^2$

   III) $\phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \frac{1}{2}D((x_1 - x_2)^2 + 2(y_1 - y_2)^2)$

c) Suche für die gegebenen Potentialen nach weiteren Erhaltungsgrößen. **1** Pkt(e)

   Hinweis: Erinnern Sie sich auch an die vorherige Aufgabe.

Aufgabe 4.3: Elektromagnetisches Feld

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_KM_electromagnetic_field:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe üben wir den Lagrange-Formalismus für geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern. Wir werden insbesondere sehen, dass in diesen Systemen der kinetische und der konjugierte Impuls typischerweise nicht mehr übereinstimmen und nur einer von beiden erhalten sein kann.

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewegt sich im elektrischen und magnetischen Feld $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ unter der Lorentzkraft

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}.$$

Die Felder sind durch das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ und dem skalaren Potential ϕ gegeben:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

a) Betrachte ein Teilchen in einem homogonen Magnetfeld entlang der z-Achse $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$. Zeige, dass $\boldsymbol{B}$ durch die Potentiale $\phi = 0$, $\boldsymbol{A} = -yB\boldsymbol{e}_x$ gegeben ist. Zeige weiter, dass die Teilchen-Trajektorie **1** Pkt(e)

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_c t) \\ -\sin(\omega_c t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit der Zyklotron-Frequenz $\omega_c = qB/mc$, eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.

b) Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen in einem magnetischen und elektrischen Feld hat die Form, **1** Pkt(e)

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - q\phi(\boldsymbol{r}, t)$$

Zeigen Sie durch sorgfältige Rechnungen, dass die Euler-Lagrange-Gleichung zur Lorentz-Kraft führt.

c) Bestimme den kanonisch konjugierten Impuls. Wie unterscheidet sich dieser vom kinetischen Impuls $m\dot{\boldsymbol{r}}$? **1** Pkt(e)

d) Für ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld aus a) ist die Lagrange-Funktion Translationsinvariant in x-Richtung, d.h. $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r} + s\boldsymbol{e}_x$ ist eine Symmetrie. Berechne mittels dem Noether-Theorem die Erhaltungsgröße und überprüfe für die spezielle Trajektorie aus a), dass diese Größe tatsächlich erhalten ist. **1** Pkt(e)