Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

16. April 2025
SS 2025

Aufgabe 3.1: Harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen [**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_harmonic_oscillator_in_two_dimensions:km25

Übungsziel

Diese Aufgabe bietet eine einfache Anwendung des Lagrange Formalismus am Beispiel des zweidimensionalen harmonischen Oszillators. Dabei kommen verschiedene Koordinatensysteme zum Einsatz.

Eine Masse m befindet sich in einem 2-dimensionalen isotropen harmonischen Potential

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{D}{2}\boldsymbol{x}^2. \tag{1}$$

a) Bestimme die kinetische Energie T, die potentielle Energie V und die Lagrange Funktion $\mathcal{L} = T - V$ des Teilchens in kartesischen Koordinaten. **1** Pkt(e)

b) Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten und löse sie für die allgemeinen Randbedingungen $\boldsymbol{x}(t=0) = \boldsymbol{x}_0$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t=0) = \boldsymbol{v}_0$. **1** Pkt(e)

c) Wechsle nun in Polarkoordinaten, stelle erneut die Lagrange-Funktion auf und zeige, dass es eine zyklische Variable gibt. Welche Größe ist eine Erhaltungsgröße? **1** Pkt(e)

d) Stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen in Polarkoordinaten auf. **1** Pkt(e)

Aufgabe 3.2: Variationsrechnung: Geodäten [**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_variational_calculation_geodesics:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe nutzen wir eine einfache Variationsrechnung um die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf gekrümmten Oberflächen zu finden.

Wir betrachten eine Raumkurve $\boldsymbol{\gamma}$ in drei Dimensionen, welche mit $t \in [t_1, t_2]$ parametrisiert ist. Die Bogenlänge dieser Raumkurve ist definiert als

$$L = \int_{\gamma} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

a) Zeige, dass die Bogenlänge invariant unter Transformationen der Parametrisierung $t \to t'$ sind. **1** Pkt(e)

Eine Geodäte beschreibt die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

b) Zeige mithilfe einer Variationsrechnung, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten im dreidimensionalen Raum eine Gerade ist. **1** Pkt(e)

Hinweis: Da die Bogenlänge unabhängig von der Parametrisierung ist, kann hier eine günstige Wahl getroffen werden.

c) Betrachte nun einen Zylindermantel 1 Pkt(e)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, l]$. Parametrisiere eine Kurve auf dem Zylindermantel durch $z = z(t), \varphi = \varphi(t)$ über einen Parameterbereich $t \in [t_1, t_2]$. Finde mithilfe einer Variationsrechnung die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einem Zylindermantel.

d) Betrachte nun eine Kugeloberfläche 1 Pkt(e)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit $(\varphi, \vartheta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Parametrisiere eine Kurve auf der Kugeloberfläche durch $\varphi = \varphi(t), \vartheta = \vartheta(t)$ über einen Parameterbereich $t \in [t_1, t_2]$. Um die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche zu finden, leite zunächst die Euler-Lagrange-Gleichungen her. Finde die Lösung für den Spezialfall von Kurven, deren Endpunkte sich auf dem Kugeläquator bei $\vartheta(t_1) = \vartheta(t_2) = \pi/2$ befinden.

Hinweis: Zeige, dass Bewegungen in der Äquatorebene die Euler-Lagrange-Gleichungen lösen.

Aufgabe 3.3: Abfallentsorgung an Bord der ISS [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_waste_disposal_iss:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe wird eine Bewegungsgleichung mit kleiner Störung mithilfe einer Entwicklung gelöst.

Die ISS beschreibt näherungsweise eine Kreisbahn um die Erde, mit Radius R und Kreisfrequenz ω. Zur Zeit $t = 0$ werfen die Astronauten einen Abfallsack mit relativer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in Richtung Erde weg. In der Näherung $v_0 \ll \omega R$ kann angenommen werden, dass gilt: $r(t) = R + r_1(t)$ mit $r_1(t) \ll R$ und $\phi(t) = \omega t + \phi_1(t)$ mit $\phi_1(t) \ll 2\pi$.

Bestimme und löse die Bewegungsgleichungen für r_1 und ϕ_1 bis zur ersten Ordnung der Störung.