Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

7. Juli 2025
SS 2025

Aufgabe 13.1: Stange in der Garage

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: rod_in_garage:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe werden wir ein weitverbreitetes Paradoxon genauer untersuchen. Betrachtet man eine Stange mit großer Geschwindigkeit und eine Garage mit gleicher Länge, so kann man beide Seiten der Garage gleichzeitig schließen, während die Stange hindurchfliegt, da diese aufgrund der Längenkontraktion aus dem Bezugsystem der Garage verkürzt ist. Andersherum ist jedoch auch die Garage aus dem Bezugsystem des Stabes verkürzt und der Stab kann nicht mit geschlossenen Toren in die Garage passen.

Wir betrachten eine Stange der Ruhelänge L, die sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ auf eine Garage zubewegt. Die Garage hat ebenfalls die Länge L und jeweils ein Tor am Eingang und Ausgang. Wir schließen das Tor 1, sobald das Stangenende den Garagenanfang passiert hat und öffnen Tor 2, sobald der Stangenanfang das Garagenende erreicht.

a) Im Folgenden betrachten wir zuerst das Inertialsystem (IS) K, in welchem die Garage ruht. Gib die Anfangs- und Endpunkte der Garage und der Stange im IS K an als Funktionen $x(t)$. Zu welcher Zeit wird Tor 2 geöffnet? **1** Pkt(e)

   Hinweis: Wähle das IS K so, dass zur Zeit $t = 0$ das Stabende sich an Tor 1 an der Position $x = 0$ befindet.

b) Nun wechseln wir ins IS K' , in dem die Stange ruht. Gebe die Anfangs- und Endpunkte der Garage und der Stange in K' an als Funktionen $x'(t')$. **1** Pkt(e)

   Hinweis: Wähle auch das IS K' so, dass zur Zeit $t' = 0$ das Stabende sich an Tor 1 an der Position $x' = 0$ befindet.

Um das Paradaxon aufzulösen und das Gedankenexperiment besser zu verstehen betrachten wir vier Raum-Zeit-Punkte (t, x):

(i) Das Stangenende erreicht Tor 1, und dieses schließt: $(0, 0)$

(ii) Der Stangenanfang zur Zeit $t = 0:$ $(0, L/\gamma)$

(iii) Das Tor 2 zur Zeit $t = 0:$ $(0, L)$.

(iv) Der Stangenanfang erreicht Tor 2 und dieses öffnet: $(\frac{L}{v}(1 - \frac{1}{\gamma}), L)$

c) Transformiere die vier Raum-Zeit-Punkte in das IS K' zu (t', x') . **1** Pkt(e)

d) Zeichne nun für beide IS K und K' jeweils ein Raum-Zeit-Diagramm (t über x bzw. t' über x') mit den Weltlinien der Stange und der Garage und markiere die vier Raum-Zeit-Punkte. **1** Pkt(e)

   Interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 13.2: Relativistischer Stoß

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: relativistic_collision:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe machen wir uns noch mehr mit der relativistischen Mechanik vertraut am Beispiel eines elastischen Stoßes.

Wir betrachten den elastischen Stoß (d.h. die Massen vor und nach dem Stoß sind erhalten) zweier Massen m_1 und m_2. Im Inertialsystem K ruht Masse 1 und Masse 2 bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ (mit $v = |\boldsymbol{v}|$) auf Masse 1 zu. Nach dem Stoß habe Masse 1 die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_1$ und Masse 2 die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2$.

a) Wie lautet die relativistische Energie- und Impulserhaltung? Schreibe die entsprechenden Vierervektoren explizit hin. **1**Pkt(e)

Der Stoßprozess ist durch die Anfangsgeschwindigkeiten noch nicht vollständig definiert, sondern hängt außerdem von einem Stoßparameter ab. Wir wollen den Stoßprozess nun unabhängig vom Stoßparameter betrachten und stattdessen abhängig vom Betrag der Geschwindigkeit $v_2 = |\boldsymbol{v}_2|$ nach dem Stoß berechnen.

b) Gib den Betrag der Geschwindigkeit der Masse 1 nach dem Stoß $v_1 = |\boldsymbol{v}_1|$ in Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit v und der Geschwindigkeit v_2 an. **1**Pkt(e)

   Hinweis: Nutze die relativistische Energieerhaltung.

Damit ist nun auch der Betrag der Geschwindigkeit v_1 bekannt.

c) Nun sind wir interessiert am Winkel θ zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Massen nach dem Stoß. Gib diesen in Abhängigkeit der beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß (v_1 und v_2) an. **1**Pkt(e)

   Hinweis: Nutze, dass das Skalarprodukt $p_1^\mu p_{2\,\mu}$ vor und nach dem Stoß erhalten ist (warum?). Verwende außerdem die Relation $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = v_1 v_2 \cos\theta$.

   Zwischenergebnis:

$$\cos\theta = \frac{c^2}{v_1 v_2} \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - \frac{m_1}{m_2})}{\gamma_1 \gamma_2} \tag{1}$$

d) Abschließend wollen wir spezielle Grenzfälle des Ergebnisses aus der (c) betrachten. Wie lautet der Winkel θ in den folgenden Fällen **1**Pkt(e)

   (i) Im nicht relativistischen Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten (**Hinweis:** $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}(\frac{v^4}{c^4})$).

   (ii) Im Falle gleicher Massen $m_1 = m_2$. Betrachte diesen Fall zuerst im nicht relativistischen Grenzfall, wie ändert sich der Winkel bei relativistischen Geschwindigkeiten?

   (iii) Im Grenzfall $v_1 \to c$ und $v_2 \to c$.

Aufgabe 13.3: Vierergeschwindigkeit und Viererbeschleunigung [**Mündlich** | 2 Pkt(e)]

ID: four_speed_four_acceleration:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe machen wir uns vertraut mit der Erweiterung der Geschwindigkeit und Beschleunigung in Form eines Vierervektors.

Wir starten mit dem Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Die Vierergeschwindigkeit u^μ und die Viererbeschleunigung b^μ sind dann definiert als

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad \text{und} \quad b^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} , \tag{3}$$

wobei τ die Eigenzeit ist mit $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$. Der Vorteil dieser Definition der Geschwindigkeit und Beschleunigung ist, dass sich diese analog zum Vierervektor über die Lorentztransformationen von einem Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem transformieren lassen.

a) Berechne die Vierergeschwindigkeit als Funktion des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$. Wie lautet das Skalarprodukt von u^μ mit sich selbst? **1**Pkt(e)

b) Berechne die Viererbeschleunigung als Funktion des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$ und der Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$. Zeige, dass im Minkowski-Raum die Viererbeschleunigung stets orthogonal zur Vierergeschwindigkeit ist. **1**Pkt(e)