Aufgabe 12.1: Lorentztransformation

[Schriftlich | 4 Pkt(e)]

ID: ex_KM_Lorentz_transformation:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe werden wir die Lorentztransformation am Beispiel eines beliebigen Lorentzboosts genauer betrachten. Durch Anwenden dieser Lorentztransformation leiten wir die relativistische Addition zweier Geschwindigkeiten her.

- a) Zeige für einen beliebigen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$, mit $v = |\mathbf{v}|$, dass die Lorentztransformation gegeben ist durch 1 Pkt(e)

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c} \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} t. \end{aligned} \quad (1)$$

Hinweis: Starte zuerst mit den Transformationen für den Anteil parallel $x_{\parallel}$ und senkrecht $x_{\perp}$ zum Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$, und leite daraus das Ergebnis für $\mathbf{x}$ her.

- b) Nutze das Ergebnis (1), um die zugehörige 4×4 Matrixdarstellung Λ dieser Lorentztransformation zu bestimmen, sodass gilt 1 Pkt(e)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- c) Ein Teilchen bewegt sich nun im Inertialsystem (IS) K' mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}' = d\mathbf{x}'/dt'$. Welche Geschwindigkeit $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ hat das Teilchen im IS K . 1 Pkt(e)

Hinweis: Nutze $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}/dt'}{dt/dt'}$.

Zwischenergebnis:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\gamma} \frac{\mathbf{u}' + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v}}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \quad (3)$$

- d) Betrachte nun die beiden Spezialfälle $\mathbf{u}' \perp \mathbf{v}$ und $\mathbf{u}' \parallel \mathbf{v}$ und gib $\mathbf{u}$ für diese Fälle an. Vergewissere dich in beiden Fällen, dass für Geschwindigkeiten $|\mathbf{u}'| < c$ und $|\mathbf{v}| < c$ auch die Geschwindigkeit $|\mathbf{u}|$ stets kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit c ist. 1 Pkt(e)

Aufgabe 12.2: Erzeugende für harmonischer Oszillator

[Mündlich | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_generating_func_harmonic_oscillator:km25

Übungsziel

Geeignete kanonische Transformationen können die Form einer gegebenen Hamilton-Funktion drastisch vereinfachen. Als konkretes Beispiel betrachten wir hier den harmonischen Oszillator.

- a) Gebe die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators (Masse m , Eigenfrequenz ω , verallgemeinerte Koordinate q) an. 1 Pkt(e)
- b) Führe eine kanonische Transformation mit der Erzeugenden 1 Pkt(e)

$$F_2(q, P) = \frac{m}{2} \omega q \sqrt{\frac{2P}{m\omega} - q^2} + P \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \right) \quad (4)$$

aus. Wie lauten die kanonischen Gleichungen des Oszillators in den neuen Variablen? Löse diese und finde damit $Q(t)$ und $P(t)$. Bestimme auch $q(t)$ und $p(t)$ durch Rücktransformation von $Q(t)$ und $P(t)$. Skizziere die Trajektorien im (q, p) und (Q, P) Phasenraum.

- c) Bestimme die zu $F_2(q, P)$ gehörende Erzeugende $F_1(q, Q)$. 1 Pkt(e)

Aufgabe 12.3: Zeitdilatation und Zwillingsparadoxon

[Mündlich | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_time_dilatation_and_twin_paradox:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe betrachten wir die Zeitdilatation am Beispiel von Myonen. Ausgehend davon lösen wir ein weiteres Paradoxon der speziellen Relativitätstheorie: das Zwillingsparadoxon.

Wir betrachten zwei Myonen Scharen (A und B), die sich beide zur Zeit $t = 0$ am Punkt 1 befinden. Aus dem Inertialsystem (IS) K ruhen die Myonen der Schar A. Die Myonen der Schar B bewegen sich mit einer Geschwindigkeit $v = 0.9995c$ von Punkt 1 zu Punkt 2 (Distanz $d = 100\text{m}$). Die mittlere Lebensdauer der Myonen beträgt (im Ruhesystem des Myons) $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s.

Im IS K ist die Anzahl der Myonen in Schar A gegeben als $A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$ und analog ist aus dem IS K' (Ruhesystem der Schar B) die Anzahl der Myonen in Schar B gegeben als $B(t') = B_0 e^{-t'/\tau}$. Zur Zeit $t = t' = 0$ sind in beiden Scharen $A_0 = B_0 = 1000$ Myonen.

- a) Beschreibe die Anzahl der Myonen in Schar B aus Sicht des IS K ($B(t)$). Wieviele Myonen befinden sich in Schar A und B zum Zeitpunkt t_{p2} , wenn Schar B Punkt 2 erreicht? 1 Pkt(e)

Wie groß ist die effektive Lebensdauer τ_{eff} der bewegten Myonen B im ruhenden System K ? Vergleiche die zurückgelegte Strecke eines Myons während der effektiven Lebensdauer mit der zurückgelegten Strecke, wenn sich Myonen nicht-relativistisch verhalten würden.

Im vorherigen Aufgabenteil haben wir gelernt, warum Myonen trotz ihrer kurzen Lebensdauer deutlich längere Strecken zurücklegen können als naiv erwartet.

Nun wollen wir uns dem Zwillingsparadoxon widmen. Dazu platzieren wir an Punkt 2 einen Magneten, der die Flugrichtung der Myonen in Schar B umkehrt, sodass Schar B zurück zu Punkt 1 fliegt. Wir gehen davon aus, dass die Zeit, die zum Umkehren der Flugrichtung benötigt wird, vernachlässigt werden kann.

- b) Betrachte nun aus dem IS K die Anzahl der Myonen in Schar A und B während der kompletten Flugzeit. Wieviele Myonen sind in Schar A und B, wenn Schar B zurück an Punkt 1 ankommt? 1 Pkt(e)
- c) Abschließend betrachten wir das Ruhesystem von Schar B. Begründe warum dieses kein Inertialsystem mehr ist. 1 Pkt(e)

Wir definieren uns nun als Hinweg die Zeit bis direkt vor der Richtungsumkehr und als Rückweg die Zeit ab direkt nach der Richtungsumkehr. Wieviel Prozent der Myonen in Schar A und B zerfallen jeweils auf dem Hin- und Rückweg aus der Perspektive von B?

Sind die berechneten Werte identisch mit Aufgabenteil (b)? Wenn nicht erkläre, woher die Diskrepanz kommt.