Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

19. Juni 2025
SS 2025

Aufgabe 11.1: Poisson-Klammer

[**Schriftlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_Poisson_bracket:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe beweisen wir Eigenschaften der Poisson-Klammer und machen uns mit dieser vertraut.

a) Zeige die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer: 1 Pkt(e)

- Produktregel

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \tag{1}$$

- Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \tag{2}$$

b) Berechne $\{f, q_i\}$ und $\{f, p_i\}$. Was folgt daraus für die fundamentalen Poisson-Klammern $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$ und $\{q_i, p_j\}$? 1 Pkt(e)

c) Betrachte einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Eigenfrequenz $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$. Stelle die Hamiltonfunktion H auf und zeige mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass der Tensor zweiter Stufe 1 Pkt(e)

$$T_{ij} = p_i p_j + (m\omega)^2 q_i q_j \tag{3}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 11.2: Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_hamiltonian_function_and_equations_of_motion:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe beschreiben wir den symmetrischen Kreisel und ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld mithilfe des Hamilton Formalismus.

a) In der Vorlesung wurde die Lagrangefunktion eines symmetrischen Kreisels 1 Pkt(e)

$$L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi) = \frac{I_1}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2(\vartheta)\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos(\vartheta)\right)^2 - mgl\cos(\vartheta) \tag{4}$$

mit den Euler-Winkeln φ, ϑ und ψ behandelt. Berechne die zugehörige Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\left(\phi(\boldsymbol{r},t) - \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right). \tag{5}$$

b) Stelle die Hamiltonfunktion H auf und bestimme die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Leite daraus die Bewegungsgleichung für das geladene Teilchen her. **1** Pkt(e)

c) Untersuche, wie sich H unter einer Eichtransformation **1** Pkt(e)

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\xi \tag{6a}$$
$$\phi' = \phi - \partial\xi/\partial t \tag{6b}$$

verhält. Bestimme dazu die transformierte Hamiltonfunktion und die zugehörigen Bewegungsgleichungen. Welchen Einfluss hat die Eichtransformation auf die Bewegung des geladenen Teilchens?

Aufgabe 11.3: Poisson-Klammern des Drehimpulses

[**Mündlich** | 1 Pkt(e)]

ID: ex_KM_Poisson_brackets_of_angular_momentum:km25

Übungsziel

Wir betrachten den Drehimpuls und sehen, dass dessen Poisson-Klammern genau der Drehimpulsalgebra gehorchen. Diese Algebra wird uns in der Quantenmechanik wieder begegnen.

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem Zentralpotential $V(\boldsymbol{x})$ in drei Dimensionen. Der Lagrangian ist gegeben durch $L = T - V$.

Bestimme die Hamiltonfunktion. Drücke den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ über die kanonischen Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{p}$ aus und zeige

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

die "Vertauschungsrelationen" des Drehimpulses.