Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

17. Juni 2025
SS 2025

Aufgabe 10.1: Instabile Rotation [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_unstable_rotation:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe erhalten wir eine bessere Intuition zu instabilen Rotationsachsen von starren Körpern. Wir stützen unsere Beobachtungen durch eine Simulation.

Ein starrer Körper hat die (paarweise verschiedenen) Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, I_3 und rotiere frei mit dem Drehimpuls $\boldsymbol{M}$ (im körperfesten System), sodass seine kinetische Energie E konstant bleibt.

a) Zeige, dass die Erhaltung der Energie dazu führt, dass sich der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{M}$ auf der Oberfläche eines Ellipsoids befindet. 1 Pkt(e)

Erlaubte Drehimpulse $\boldsymbol{M}(t)$ werden durch die Eulerschen Gleichungen (ohne externes Drehmoment)

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{1}$$

beschrieben und müssen sich auf der Schnittmenge des Energie-Ellipsoids und der Kugeloberfläche befinden, die durch $|\boldsymbol{M}| = \text{const.}$ beschrieben wird. Dabei ist $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System.

b) Plotte den Energie-Ellipsoid und die Drehimpuls-Kugel für die folgenden Anfangsbedingungen: 1 Pkt(e)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_1(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2(t=0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_3(t=0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Welchem Anfangsdrehimpuls folgt eine instabile Rotation?

c) Löse für die oben genannten Anfangsbedingungen die Euler-Gleichungen numerisch und plotte die Lösung in die in Teilaufgabe b) generierten Abbildungen. 1 Pkt(e)

Hinweis: Gehe hierbei vor wie in Problem 7.2 und nutze das Euler-Verfahren mit hinreichend kleinen Zeitschritten um Gleichung (1) zu lösen.

Aufgabe 10.2: Legendre-Transformation [**Schriftlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_legendre_transform:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe machen wir uns mit den Eigenschaften der Legendre-Transformation vertraut.

Die Legendre-Transformation der Funktion f ist gegeben durch

$$g(y) = xy - f(x) \tag{3}$$

mit $y = f'(x)$.

a) Zeige, dass für die Wohldefiniertheit der Transformation $f'' > 0$ oder $f'' < 0$ notwendig ist. **1** Pkt(e)

b) Leite her, dass aus $f'' > 0$ auch die Beziehung $g'' > 0$ folgt und somit die Rücktransformation existiert. **1** Pkt(e)

c) Wende die Legendre-Transformation ein zweites Mal an und zeige, dass sich wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ergibt. **1** Pkt(e)

Aufgabe 10.3: Rotierender Neutronenstern

[**Mündlich** | 2 Pkt(e)]

ID: ex_spinning_top_neutron_star:km25

Übungsziel

Neutronensterne sind dafür bekannt, dass sie manchmal sehr heftige Sternenbeben haben, bei denen sich ihre Massenverteilung ändert. Dies macht sie zu einem natürlichen Beispiel für einen Kreisel mit wechselnden Trägheitsmomenten. In dieser Übung werden wir untersuchen, wie sich diese Änderung der Trägheit auf die die Rotation auswirkt.

Nehmen wir an, dass die Oberfläche eines Neutronensterns langsam vibriert, so dass die Hauptträgheitsmomente beschrieben werden können durch

$$I_{zz} = \frac{2}{5} m R^2 \left(1 + \epsilon \cos(\omega t)\right) \,, \tag{4}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2}{5} m R^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \cos(\omega t)\right) \,. \tag{5}$$

Die Abweichung von der perfekten Kugel ist gering ($\epsilon \ll 1$). Gleichzeitig dreht sich der Neutronenstern mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{\Omega}(t)$.

a) Zeigen Sie, dass die z-Komponente von $\mathbf{\Omega}(t)$ nahezu konstant bleibt. **1** Pkt(e)

b) Bestimmen Sie die Bewegung von $\mathbf{\Omega}(t)$ und skizzieren Sie sie. Betrachten Sie dabei vor allem die Grenzfälle $\omega \to 0$ und $\epsilon \ll \omega/\Omega_z$. **1** Pkt(e)