Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

8. April 2025
SS 2025

Informationen zur Vorlesung und den Übungen

Hier einige Informationen zur Vorlesung ***"Theo I: Klassische Mechanik"***:

- Die C@MPUS-ID dieses Kurses ist 042010002.
- Informationen zur Vorlesung finden sich auf der Institutshomepage:

  https://itp3.info/km25

  und in ILIAS:

  https://ilias3.uni-stuttgart.de/go/crs/4029824
- **Schriftliche** Aufgaben müssen im ILIAS hochgeladen oder in der Übung abgegeben werden und werden von den Tutoren korrigiert. Zum Erlangen des Übungsscheines müssen **80 %** der Punkte für die schriftlichen Übungen gesammelt werden.
- **Mündliche** Aufgaben sollen für die Übungsstunde vorbereitet werden. Sie werden in den Tutorien von den Studenten präsentiert. Zum Erlangen des Übungsscheines müssen **66 %** der Übungsaufgaben votiert werden.
- Jeder Student muss mindestens **2** Aufgaben an der Tafel **präsentieren**
- Aufgaben, die mit einem Stern markiert wurden ($*$) sind optional und geben Bonuspunkte.
- Bei Fragen kannst du dich jeder Zeit an deinen Tutor wenden.

Aufgabe 1.1: Galilei Transformationen I

[**Schriftlich** | 2 Pkt(e)]

ID: ex_galilei_transformation_I:km25

Übungsziel

In der Vorlesung wurden die Galilei Transformationen eingeführt. In dieser Aufgabe soll das Transformationsverhalten von Impuls und kinetischer Energie untersucht werden. Außerdem ist die Forminvarianz der Newtonschen Gleichungen zu überprüfen.

Die Galilei Transformationen beschreiben den Übergang zwischen Inertialsystemen. Sie lassen sich schreiben als

$$t' = t + a, \tag{1a}$$
$$\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{b}. \tag{1b}$$

Hierbei ist $R \in \mathrm{SO}(3)$ eine 3×3- Matrix mit Determinante 1 und $R^T R = \mathbb{1}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren und $a \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Hinzu kommen die diskreten Galilei Transformationen: die Raumspiegelung $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r}$ und die Zeitumkehr $t' = -t$.

a) Berechne wie der Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ und die kinetische Energie $T = m\mathbf{v}^2/2$ unter Galilei Transformation transformieren. **1**Pkt(e)

Betrachte zwei Punktteilchen, die mit dem Potential $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ wechselwirken. Die Bewegung der Teilchen wird durch die Newtonschen Gleichungen

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{2a}$$
$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{2b}$$

beschreiben, wobei $\boldsymbol{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und $\boldsymbol{F}_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ die aus $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ resultierenden Kräfte sind.

b) Zeige, dass die Newtonschen Gleichungen für das System unter Galilei Transformation (inklusive der diskreten Transformationen der Spiegelung und Zeitumkehr) forminvariant sind. **1**Pkt(e)

Hinweis: Betrachte zunächst wie sich Beschleunigung und Kraft unter Galilei Transformation transformieren. Wie sehen die resultierenden Bewegungsgleichungen aus?

Aufgabe 1.2: Galilei Transformationen II

[**Schriftlich** | 5 Pkt(e)]

ID: ex_galilei_transformation_II:km25

Übungsziel

Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass die Galilei Transformationen eine nicht-kommutative Gruppe bilden.

Eine Menge $\mathcal{G}$ zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ ist eine Gruppe falls die nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Für drei Elemente $g, g', g'' \in \mathcal{G}$ gilt $g \cdot (g' \cdot g'') = (g \cdot g') \cdot g''$. (Assoziativität)
- Es existiert ein neutrales Element $e \in \mathcal{G}$ mit $g \cdot e = e \cdot g = g$.
- Zu jedem Element $g \in \mathcal{G}$ existiert ein inverses Element $g^{-1} \in \mathcal{G}$, sodass $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$.

Die diskreten Transformationen dürfen für die gesamte Aufgabe vernachlässigt werden.

a) Finde zunächst die Gruppenverknüpfung. Führe hierzu eine Galilei Transformation g aus. Wende anschließend auf die transformierten Koordinaten eine weitere Galilei Transformation g' an. Wie hängen die neuen Koordinaten von den ursprünglichen Koordinaten ab? Vergleiche dein Ergebnis mit einer Galilei Transformation g''. Bestimme $g'' = (R'', \boldsymbol{u}'', \boldsymbol{b}'', a'')$ in Abhängigkeit von $g = (R, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}, a)$ und $g' = (R', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{b}', a')$. **1**Pkt(e)

Zeige nun, dass die Galilei Transformationen zusammen mit der zuvor bestimmten Verknüpfung eine Gruppe bilden.

b) Zeige, dass die Assoziativität erfüllt ist. **1**Pkt(e)

c) Finde das neutrale Element $e \in \mathcal{G}$, sodass $g \cdot e = e \cdot g = g$ erfüllt ist. **1**Pkt(e)

d) Bestimme zu jedem Element $g \in \mathcal{G}$ ein Inverses Element $g^{-1} \in \mathcal{G}$, sodass gilt $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$. **1**Pkt(e)

Eine Gruppe heißt kommutative Gruppe, wenn außerdem für alle Elemente $g, g' \in \mathcal{G}$ gilt, dass $g \cdot g' = g' \cdot g$. (Kommutativität)

e) Zeige, dass die Galilei Transformationen keine kommutative Gruppe bilden. **1**Pkt(e)

Hinweis: Finde ein Beispiel von zwei Galilei Transformationen, welches die Kommutativität verletzt.

Aufgabe 1.3: Galilei Invarianz

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_galilei_invariance:km25

Übungsziel

In dieser Aufgabe verwenden wir die Invarianz der Newtonschen Gleichungen unter Galilei Transformation um einige allgemeine Aussagen über die Bewegung von Punktteilchen zu machen.

Betrachte ein mechanisches System mit einem beliebigen Kraftgesetz. Die Kraft, die auf das i-te Teilchen wirkt, lässt sich allgemein schreiben als $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \ldots, t)$.

a) Das System bestehe zunächst aus zwei Punktteilchen. Zur Anfangszeit befinden sie sich in Ruhe (in einem gewissen Inertialsystem). Zeige, dass die Bewegung in der Geraden verläuft, die die Anfangslage enthält. **1** Pkt(e)

   Hinweise:

   - Beachte, dass die Newtonschen Gleichungen invariant unter Galilei Transformation sind. Welche Bedingungen folgen daraus für die Kraft? Betrachte hierfür die Invarianz unter zeitlicher Translation, räumlicher Translation und Rotation.
   - Welche Symmetrien hat das System? (Unter welchen Transformationen ist es invariant?)

b) Zeige, dass für drei zu Beginn ruhende Punktteilchen die Bewegung in einer Ebene verläuft. **1** Pkt(e)

c) Ein mechanisches System bestehe aus zwei Punktteilchen. Zeige, dass die Bewegung in einem geeigneten Inertialsystem in einer Ebene verläuft. **1** Pkt(e)