Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

14. Juni 2022
SS 2022

Aufgabe 9.1: Instabile Rotation

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_instabile_rotation:km22

> **Übungsziel**
>
> In dieser Aufgabe erhalten wir eine bessere Intuition zu instabilen Rotationsachsen von starren Körpern. Wir stützen unsere Beobachtungen durch eine Simulation.

Ein starrer Körper hat die (paarweise verschiedenen) Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, I_3 und rotiere frei mit dem Drehimpuls $\boldsymbol{M}$ (im körperfesten System), sodass seine kinetische Energie E konstant bleibt.

a) Zeige, dass die Erhaltung der Energie dazu führt, dass sich der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{M}$ auf der Oberfläche eines Ellipsoids befindet. [1 Pkt(e)]

Erlaubte Drehimpulse $\boldsymbol{M}(t)$ werden durch die Eulerschen Gleichungen (ohne externes Drehmoment)

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{1}$$

beschrieben und müssen sich auf der Schnittmenge des Energie-Ellipsoids und der Kugeloberfläche befinden, die durch $|\boldsymbol{M}| = \text{const.}$ beschrieben wird. Dabei ist $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System.

b) Plotte den Energie-Ellipsoid und die Drehimpuls-Kugel für die folgenden Anfangsbedingungen: [1 Pkt(e)]

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_1(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2(t=0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_3(t=0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Welchem Anfangsdrehimpuls folgt eine instabile Rotation?

c) Löse für die oben genannten Anfangsbedingungen die Euler-Gleichungen numerisch und plotte die Lösung in die in Teilaufgabe b) generierten Abbildungen. [1 Pkt(e)]

Hinweis: Gehe hierbei vor wie in Problem 6.2 und nutze das Euler-Verfahren mit hinreichend kleinen Zeitschritten um Gleichung (1) zu lösen.

Aufgabe 9.2: Legendre-Transformation

[**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_legendre_transformation:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe machen wir uns mit den Eigenschaften der Legendre-Transformation vertraut.

Die Legendre-Transformation der Funktion f ist gegeben durch

$$g(y) = xy - f(x) \tag{3}$$

mit $y = f'(x)$.

a) Zeige, dass für die Wohldefiniertheit der Transformation $f'' > 0$ oder $f'' < 0$ notwendig ist. [1 Pkt(e)]

b) Leite her, dass aus $f'' > 0$ auch die Beziehung $g'' > 0$ folgt und somit die Rücktransformation existiert. [1 Pkt(e)]

c) Wende die Legendre-Transformation ein zweites Mal an und zeige, dass sich wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ergibt. [1 Pkt(e)]

d) Führe die Legendre-Transformation für ein allgemeines mechanisches System mit der Lagrangefunktion $L = T - V$ und [1 Pkt(e)]

$$T = \sum_{ij} A_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{4a}$$

$$V = V(\boldsymbol{q}) \tag{4b}$$

durch. Zeige, dass $H = T + V$ ist.

Aufgabe 9.3: Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_hamiltonfunktion_hamiltonsche_bewegungsgleichungen:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe beschreiben wir den symmetrischen Kreisel und ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld mithilfe des Hamilton Formalismus.

a) In der Vorlesung wurde die Lagrangefunktion eines symmetrischen Kreisels [1 Pkt(e)]

$$L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta)\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos(\vartheta)\right)^2 - mgl\cos(\vartheta) \tag{5}$$

mit den Euler-Winkeln φ, ϑ und ψ behandelt. Berechne die zugehörige Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\left(\phi(\boldsymbol{r}, t) - \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right). \tag{6}$$

b) Stelle die Hamiltonfunktion H auf und bestimme die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Leite daraus die Bewegungsgleichung für das geladene Teilchen her. [1 Pkt(e)]

c) Untersuche, wie sich H unter einer Eichtransformation [1 Pkt(e)]

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\xi \tag{7a}$$

$$\phi' = \phi - \partial\xi/\partial t \tag{7b}$$

verhält. Bestimme dazu die transformierte Hamiltonfunktion und die zugehörigen Bewegungsgleichungen. Welchen Einfluss hat die Eichtransformation auf die Bewegung des geladenen Teilchens?