Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

31. Mai 2022
SS 2022

Aufgabe 8.1: Hauptträgheitsachen

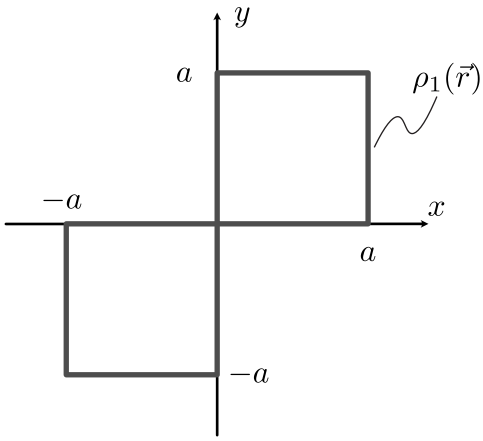
[**Schriftlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_haupttraegheitsmomente:km22

Übungsziel

Für eine ebene Masseverteilung bestimmen wir den Trägheitstensor explizit und bestimmen so die Hauptträgheitsachen sowie die Hauptträgheitsmomente.

Wir betrachten einen homogenen dünnen Draht der Masse $8m$, der in der x-y-Ebene wie in der Skizze geformt ist.



a) Wie lautet die Massendichte $\rho(\boldsymbol{r})$ für die Massenverteilung? Berechne den Trägheitstensor I bezüglich des Schwerpunkts im gegebenen Koordinatensystem. Warum gilt für eine ebene Massenverteilung $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$? [1 Pkt(e)]

Hinweis: Die Massendichte für Abschnitt 1 des Drahtes (siehe Skizze) lautet,

$$\rho_1(\boldsymbol{r}) = \frac{m}{a}\delta(z)\delta(x-a)\Theta(y)\Theta(a-y),$$

mit der Heaviside-Funktion $\Theta(x)$. Das Ergebnis für den Trägheitstensor lautet

$$I = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -2 & 0 \\ -2 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Berechne die Hauptträgheitsmomente. [1 Pkt(e)]

c) Bestimme die Hauptträgheitsachsen. [1 Pkt(e)]

Aufgabe 8.2: Billard

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_billard:km22

Übungsziel

Mit unserem Wissen über starre Körper möchten wir nun die Physik hinter einem Billardstoß genauer verstehen.

Wir betrachten eine Billardkugel der Masse M und Radius R mit einer homogenen Masseverteilung.

a) Bestimme das Trägheitsmoment der Billardkugel. [1 Pkt(e)]

Die Billardkugel wird nun mit einem Queue (mittig) gestoßen, sodass der Schwerpunkt der Kugel die Geschwindigkeit v_0 besitzt und die Kugel zu Beginn nicht rotiert. Die Stärke der Reibung zwischen dem Tisch und der Kugel ist gegeben durch $Mg\mu$ mit dem Reibungskoeffizient μ.

b) Wie weit bewegt sich die Kugel bis die anfängliche Gleitbewegung in eine reine Rollbewegung übergeht? [1 Pkt(e)]

c) Wir möchten nun verhindern, dass die Kugel zu Beginn gleitet. Wo muss die Billardkugel mit dem Queue getroffen werden damit sie direkt eine reine Rollbewegung ausführt? [1 Pkt(e)]

Aufgabe 8.3: Präzession eines kräftefreien Kreisels [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_kraeftefreier_kreisel:km22

Übungsziel

In der Vorlesung wurde die Präzessionsbewegung eines symmetrischen Kreisels im Schwerefeld der Erde hergeleitet. Hier wollen wir zeigen, dass auch ein kräftefreier Kreisel eine Präzessionsbewegung ausführt, wenn die Drehachse nicht mit einer der stabilen Hauptträgheitsachsen übereinstimmt.

Die Änderung des Drehimpulses $\boldsymbol{M}$ im körperfesten System wird durch die Euler Gleichungen beschrieben,

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\Omega}, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschindigkeit im körperfesten System ist und $\boldsymbol{N}$ das externe Drehmoment. Im Folgenden betrachten wir einen kräftefreien ($\boldsymbol{N} = 0$) symmetrischen Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2 \neq I_3$.

a) Löse die Euler Gleichungen im Hauptachsensystem. Skizziere die Bewegung von $\boldsymbol{\Omega}$. [1 Pkt(e)]
Hinweis: Der Drehimpuls erfüllt $\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\Omega}$.

Im bewegten Koordinatensystem können wir $\boldsymbol{\Omega}$ durch die Eulerwinkel ausdrücken,

$$\Omega_1 = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta \tag{2}$$
$$\Omega_2 = -\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta \tag{3}$$
$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta. \tag{4}$$

b) Bestimme mit der Lösung aus a) die Zeitahängigkeit der Eulerwinkel $\vartheta(t)$, $\psi(t)$ und $\varphi(t)$. [1 Pkt(e)]

Hinweis: Nutze, dass der Drehimpuls $\boldsymbol{m}$ im Laborsystem erhalten ist und wähle $\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{e}_z$. Drücke $\boldsymbol{e}_z$ durch die Einheitsvektoren im körperfesten System aus.

c) Fertige eine Skizze der Bewegung des Kreisels an. [1 Pkt(e)]