Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

24. Mai 2022
SS 2022

Aufgabe 7.1: Corioliskraft

[**Mündlich** | 2 Pkt(e)]

ID: ex_corioliskraft:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe soll der Einfluss der Corioliskraft auf einen fallenden Stein untersucht werden.

Wir betrachten einen Stein, der vom Stuttgarter Fernsehturm (Höhe: 217 m) fällt. Zu Beginn ist der Stein in Ruhe. Der Einfluss der Zentrifugalkraft ist gering und kann vernachlässigt werden. Stelle die Bewegungsgleichungen auf. Schreibe die Lösung als $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + \boldsymbol{r}_1(t) + \mathcal{O}(\Omega^2)$, wobei $\boldsymbol{r}_0(t)$ die Lösung ohne Corioliskraft ist und $\boldsymbol{r}_1(t)$ der Anteil der Lösung, der linear in in der Winkelgeschwindigkeit der Erde Ω ist. Entwickle die Bewegungsgleichungen konsistent in der Winkelgeschwindigkeit. Wie weit weicht die Position des Steins, wenn er auf dem Boden aufkommt, vom freien Fall ab? Wie hängt das Resultat vom Breitengrad ab?

Aufgabe 7.2: Foucaultsches Pendel

[**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_foucaultsches_pendel:km22

Übungsziel

Mit einem foucaultschen Pendel kann die Erdrotation auf anschauliche Weise und ohne astronomische Beobachtungen nachgewiesen werden. In dieser Aufgabe soll die Bahnkurve des Pendels ermittelt werden.

Betrachte ein ideales Pendel der Länge l, das mit einer kleinen Auslenkung oszilliert.

a) Zeige, dass die Kraft, die auf die Pendelmasse wirkt, für kleine Auslenkungen geschrieben werden kann als $\boldsymbol{F} = -m\omega_p^2(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y)$. Was ist ω_p? [1 Pkt(e)]

Berücksichtige nun die Erdrotation. Wir wollen die Bewegung des Pendels im Koordinatensystem K' einer Person auf der Erde bestimmen. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die z-Achse senkrecht auf der Erdoberfläche steht.

b) Stelle die Bewegungsgleichung im rotierenden Koordinatensystem auf. Vergewissere dich hierfür, dass für realistische Pendellängen l die Winkelgeschwindigkeit des Pendels sehr viel größer ist als die Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Wie lang müsste das Pendel sein, damit die Winkelgeschwindigkeit des Pendels und die Rotationsgeschwindigkeit der Erde gleich groß sind? Nutze dies um zu zeigen, dass die Bewegungsgleichungen in erster Näherung folgende Form annehmen [1 Pkt(e)]

$$\ddot{x} = 2\Omega_z\dot{y} - \omega_p^2 x, \tag{1a}$$
$$\ddot{y} = -2\Omega_z\dot{x} - \omega_p^2 y. \tag{1b}$$

Wie sieht Ω_z aus?

c) Verwende den Ansatz $u_\pm = x \pm iy$ um die Bewegungsgleichungen für x und y zu entkoppeln und finde die allgemeinen Lösungen $u_\pm(t)$ der resultierenden Differentialgleichungen. Zeige, dass sich für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ folgende Lösung für x und y ergibt [1 Pkt(e)]

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\Omega_z t)\cos(\omega_p t) + y_0 \sin(\Omega_z t)\cos(\omega_p t) \\ &\quad - y_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \cos(\Omega_z t)\sin(\omega_p t) + x_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \sin(\Omega_z t)\sin(\omega_p t), \qquad (2a) \\ y(t) &= y_0 \cos(\Omega_z t)\cos(\omega_p t) - x_0 \sin(\Omega_z t)\cos(\omega_p t) \\ &\quad + x_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \cos(\Omega_z t)\sin(\omega_p t) + y_0 \frac{\Omega_z}{\omega_p} \sin(\Omega_z t)\sin(\omega_p t). \qquad (2b) \end{aligned}$$

d) Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass das Pendel zu Beginn nur in x-Richtung ausgelenkt wird. Welche Werte nehmen $r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t)^2)}$ und $\Theta = \arctan(y(t)/x(t))$ zu den Zeitpunkten $t_n = \pi/\omega_p n$ mit $n \in \mathbb{N}$ an? [1 Pkt(e)]

Betrachte nun ein Pendel am Nordpol. Skizziere die Bewegung des Pendels in der x-y-Ebene für $\Omega = \omega_p/6$. Markiere hierzu zunächst die Positionen des Pendels zu den Zeitpunkten t_n (Beachte die Vorzeichen von x und y!). Verbinde die eingetragenen Positionen anschließend in der richtigen Reihenfolge.

Erläutere qualitativ wie sich die Bewegung des Pendels ändert, wenn es anstatt am Nordpol in Stuttgart oder in Sidney steht.

Aufgabe 7.3: Brachistochrone

[**Mündlich** | 5 (+1 Bonus) Pkt(e)]

ID: ex_brachistochrone:km22

> **Übungsziel**
>
> Johann Bernoulli stellte 1696 die Frage, wie die Bahn einer Kugel im Schwerefeld der Erde gewählt werden muss, sodass die Zeit, die die Kugel braucht um den Weg von einem Punkt A zu einem Punkt B zurückzulegen, minimal ist. Die Aufgabe stieß bei den Mathematikern seiner Zeit auf breites Interesse. Neben Johann Bernoulli fanden unter anderem auch sein Bruder Jakob, Newton, Leibniz, Thschirnhaus und l'Hopital eine Lösung. Heute gilt dies oft als die Geburtsstunde der Variationsrechnung.

Eine Kugel rollt im Schwerefeld der Erde auf einer Bahn vom Punkt $A = (0, h)$ zum Punkt $B = (d, 0)$. Zu Beginn ruht die Kugel. Die Bahn soll so gewählt werden, dass die Zeit, die die Kugel braucht um von A nach B zu kommen, so kurz wie möglich ist. Die Kugel wird zunächst als so klein angenommen, dass ihre Rotation vernachlässigt werden kann.

a) Die Beschränkung auf die Brachistochrone stellt eine Zwangsbedingung dar. Die Brachistochrone wird beschrieben durch eine Funktion $y(x)$. Wie lautet die Zwangsbedingung? Schreibe die Lagrange-Funktion in generalisierten Koordinaten auf. [1 Pkt(e)]

b) Verwende Energieerhaltung um eine formale Lösung $t(y(x), y'(x)) = \int_0^d L_t(y(x), y'(x))dx$ zu finden. [1 Pkt(e)]

Hinweis: Orientiere dich hierbei an der analytischen Lösung des $1/r$ Potentials aus der Vorlesung.

Um den gesuchten Pfad zu finden wenden wir nun das Variationsprinzip auf das Funktional $t(y(x), y'(x))$ an.

c) Die Funktion $L_t(y(x), y'(x))$ hängt nicht explizit von x ab. Zeige, dass man die Euler-Lagrange-Gleichungen in diesem Fall vereinfachen kann zu [1 Pkt(e)]

$$L_t - y' \frac{\partial L_t}{\partial y'} = c, \tag{3}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist.

Hinweis: Betrachte hierzu die totale Ableitung dL_t/dx.

d) Verwende Gleichung (3) um das Funktional $t(y(x), y'(x))$ zu minimieren. Bestimme die Lösung für die Anfangsbedingungen $2d = \pi h$ und $h = 0$. [1 Pkt(e)]

Hinweis: Ein Integral der Form $\int \sqrt{(a-y)/(b-a+y)}dy$ kann mithilfe der Substitution $y = -b\sin(\theta/2)^2 + a$ gelöst werden. Es ist ausreichend die Bahn mit einer parametrischen Lösung $(x(\theta), y(\theta))$ zu beschreiben.

e) Plotte die Bahnkurve für $h = 1$ und $d = \pi/2$ und für $h = 0$ und $d = \pi$. [1 Pkt(e)]

*f) [+1 BonusPkt(e)] Wie ändert sich die Bahnkurve des Schwerpunktes, wenn die Rotation der Kugel berücksichtigt wird?