Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

17. Mai 2022
SS 2022

Aufgabe 6.1: Schiefe Ebene

[**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_schiefe_ebene:km22

Übungsziel

Zwangsbedingungen können im Lagrange-Formalismus direkt eingebaut werden. Ein simples und doch sehr lehrreiches Beispiel ist ein Teilchen auf einer schiefen Ebene. Ziel dieser Aufgabe ist es den Zusammenhang von Zwangsbedingungen, generalisierten Koordinaten und Zwangskräften zu verstehen.

Ein Teilchen mit Masse m gleitet im Gravitationspotential $V = mgy$ auf einer schiefen Ebene mit Winkel α ohne Reibung.

a) Gib die Zwangsbedingung $g(x, y) = 0$ an und wähle eine geeignete generalisierte Koordinate. Überprüfe, dass die Zwangsbedingung in diesen Koordinaten trivial erfüllt ist und stelle die Lagrange-Funktion auf. Leite anschließend die Bewegungsgleichung her und löse diese. [1 Pkt(e)]

b) Berechne die resultierende Zwangskraft $\boldsymbol{Z} = m\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla V$ des Systems. Vergewissere dich, dass die Zwangskraft senkrecht auf der ebenen Fläche steht und der erwarteten Kraft der Ebene auf die Kugel entspricht. [1 Pkt(e)]

c) Die schiefe Ebene wird nun durch eine Parabel $y = cx^2$ ersetzt. Wir betrachten nur den Fall kleiner Auslenkungen x und einer kleinen Krümmung c. Gehe wie in Aufgabenteil (a) vor, um die Bewegung des Teilchens zu bestimmen. [1 Pkt(e)]

   Hinweise: Stelle zuerst die exakte Lagrange-Funktion auf und vernachlässige dann den kleinsten Term (für kleine x und kleine c).

d) Betrachte jetzt einen Zylinder mit Masse m, Radius R und Trägheitsmoment I. Dieser rollt nun reibungsfrei und ohne Schlupf auf der schiefen Ebene mit Winkel α im Gravitationspotential. Schreibe alle Zwangsbedingungen auf und wähle generalisierte Koordinaten, für welche diese trivial erfüllt sind. Stelle dann die Lagrange-Funktion auf und löse die Euler-Lagrange-Gleichung. [1 Pkt(e)]

   Betrachte abschließend den Spezialfall eines Hohl- und eines Vollzylinders mit Trägheitsmomenten $I_{\text{Hohl}} = mR^2$ und $I_{\text{Voll}} = mR^2/2$.

Aufgabe 6.2: Gleitpendel

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_gleitpendel:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe üben wir, wie die Wahl geeigneter generalisierter Koordinaten Probleme mit Zwangsbedingungen im Lagrange-Formalismus vereinfachen kann.

Wir betrachten ein Pendel mit der Masse m_2 und Koordinaten $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)^T$, dessen Aufhängungspunkt sich entlang einer horizontalen Geraden bewegen kann. Der Aufhängungspunkt habe die Masse m_1 und Koordinaten $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)^T$. Die Länge des Pendelstabs ist L und dessen Masse kann vernachlässigt werden.

a) Formuliere die Zwangsbedingungen dieses Systems und wähle geeignete generalisierte Koordinaten. Stelle dann die Lagrange-Funktion in den generalisierte Koordinaten auf. [1 Pkt(e)]

b) Stelle nun die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und identifiziere die resultierende Erhaltungsgröße. [1 Pkt(e)]

c) Zum Lösen dieser Differentialgleichung beschränken wir uns auf den Spezialfall kleiner Auslenkungen des Pendels $\phi \ll 1$, für den wir die Kleinwinkelnäherung für den Kosinus und Sinus nutzen können. [1 Pkt(e)]

   Hinweis: Vernachlässige alle Terme der Ordnung ϕ^2 oder höher.

d) Nun wollen wir die exakten Euler-Lagrange-Gleichungen aus Aufgabenteil (b) numerisch lösen. [1 Pkt(e)]

   Dazu müssen wir zuerst das Differentialgleichungssystem auf die Form $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})$ bringen. Zeige das aus den Euler-Lagrange-Gleichungen aus (b) folgendes Differentialgleichungssystem folgt:

$$\dot{x} = v\,, \tag{1}$$

$$\dot{v} = \frac{m_2 \sin(\phi)}{m_1 + m_2 \sin^2(\phi)} \left[g\cos(\phi) + L\omega^2 \right] , \tag{2}$$

$$\dot{\phi} = \omega\,, \tag{3}$$

$$\dot{\omega} = \frac{-\sin(\phi)}{m_1 + m_2 \sin^2(\phi)} \left[\frac{g}{L}(m_1 + m_2) + m_2 \cos(\phi)\omega^2 \right] . \tag{4}$$

   Hinweis: Die Koordinaten des Aufhängepunktes und des Pendels sind gegeben durch: $\boldsymbol{r}_1 = (x, 0)^T$ und $\boldsymbol{r}_2 = (x + L\sin\phi, -L\cos\phi)^T$.

   Implementiere diese Bewegungsgleichungen nun in der Programmiersprache deiner Wahl (Mathematica, Matlab, Python, ...) und stelle die Bewegung des Gleitpendels für $m_1 = 2\,, m_2 = 1$ und $L = 1$ sowie folgende Anfangsbedingungen dar:

   (i) Der Aufhängepunkt und das Pendel starten in Ruhe, aber mit einem Auslenkungswinkel $\phi(t = 0) = 60\,°$.

   (ii) Der Aufhängepunkt und das Pendel starten mit derselben x-Koordinate $x_1(t = 0) = x_2(t = 0) = 0$, aber der Aufhängepunkt hat eine Startgeschwindigkeit $\dot{x}_1(t = 0) = 1$, während das Pendel zu Beginn ruht ($\dot{x}_2(t = 0) = 0$).

   Hinweise: Wähle $\boldsymbol{\xi} = (x, v, \phi, \omega)^T$ und nutze das Euler-Verfahren zur numerischen Lösung der Differentialgleichung $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})$. D.h. starte mit den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\xi}_0$ und berechne die neuen Koordinaten nach einem Zeitschritt Δt durch $\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\xi}_k + \Delta t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}_k)$. (Wähle $\Delta t = 10^{-3}$, und zeige die Bewegungen für eine Gesamtzeit $T = 3$.)

Aufgabe 6.3: Die Schlittschuhläuferin

[**Mündlich** | 2 Pkt(e)]

ID: ex_schlittschuhlaeuferin:km22

Übungsziel

Diese Aufgabe zeigt wie Zwangsbedingungen Einfluss auf Erhaltungsgrößen haben können. Ziel der Aufgabe ist es nicht, ausführliche Rechnungen durchzuführen, sondern anhand der Zwangsbedingung und Zwangskraft einzuordnen, welche Erhaltungssätze verletzt werden.

Im Zentrum eines zugefrorenen Sees steht ein Baum. Um diesen Baum dreht die Schlittschuhläuferin Emmy ihre Runden. Zwischen Baum und Emmy ist ein Seil gespannt, welches sich aufgrund des Umrundens langsam aufwickelt. Zwei Beobachter streiten sich darüber, was passieren wird, wenn Emmy reibungsfrei und ohne selbst zu beschleunigen weitere Runden um den Baum dreht.

(1) Der erste sagt: »Aus Drehimpulserhaltung folgt, dass Emmy immer schneller wird, je mehr sich das Seil aufwickelt. «

(2) Der zweite meint: »Energieerhaltung gilt und daher bleibt Emmy immer gleich schnell. «

a) Welcher der beiden Beobachter hat recht? Begründe deine Antwort (eine explizite Rechnung ist nicht nötig). [1 Pkt(e)]

b) Beschreibe ein ähnliches System, in dem die Antwort umgekehrt ist. Begründe erneut deine Antwort. [1 Pkt(e)]