Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

10. Mai 2022
SS 2022

Aufgabe 5.1: Harmonisches Zentralpotential in 3D

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_harmonischer_oszillator_3D:km22

Übungsziel

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass sich das $1/r$ Potential analytisch lösten lässt. Wir wollen dies nun für das harmonische Potential r^2 wiederholen.

Betrachte ein Teilchen in drei Dimensionen in einem harmonischen Zentralpotential $V = \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2$. Wende die Methoden aus der Vorlesung zur allgemeinen Lösung des Zentralpotentials an.

a) Benutze Drehimpulserhaltung um das Problem auf eine Ebene abzubilden und führe Polarkoordinaten ein. [1 Pkt(e)]

b) Leite die formale Lösung für $r(t)$ und $r(\varphi)$ her. [1 Pkt(e)]

c) Beide Integrale sind analytisch lösbar. Berechne die Integrale und bestimme $r(t)$ und die Bahnkurve $r(\varphi)$ sowie $\varphi(t)$. [1 Pkt(e)]

Aufgabe 5.2: Laplace-Runge-Lenz-Vektor

[**Schriftlich** | 2 (+3 Bonus) Pkt(e)]

ID: ex_laplace_runge_lenz:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe betrachten wir den Laplace-Runge-Lenz-Vektor, eine weitere Erhaltungsgröße des $1/r$ Potentials zusätzlich zu Energie und Drehimpuls.

Wir betrachten zunächst ein Teilchen der Masse m im Gravitationspotential $V = -k/r$. Die dazugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \quad \text{mit} \quad k = GMm. \tag{1}$$

Dabei ist $\hat{\boldsymbol{r}}$ der Einheitsvektor welcher in Richtung $\boldsymbol{r}$ zeigt, also $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$

a) Zeige, dass der Laplace-Runge-Lenz-Vektor $\boldsymbol{A}$, definiert durch [1 Pkt(e)]

$$\boldsymbol{A} = m\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - mk\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{2}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Was ist die geometrische Interpretation dieser Erhaltungsgröße?

b) Wie hängt der Betrag des Laplace-Runge-Lenz-Vektors mit der Exzentrizität ϵ der Keplerbahn zusammen? [1 Pkt(e)]

Hinweis: Berechne dazu zunächst $\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$

Aufgrund des Noether Theorems wissen wir, dass zu jeder Symmetrie eine Erhaltungsgröße gehört. Genauso gehört zu jeder Erhaltungsgröße, so auch zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor, eine Symmetrie des Lagrangians $L = T - V$. Wir wollen dies im Folgenden zeigen. Betrachte zunächst die infinitesimale Transformation

$$q_i' = q_i + \delta q_i \quad \text{mit} \quad \delta q_i = m \sum_{j=1}^{3} \epsilon_j \left(2\dot{q}_i q_j - q_i \dot{q}_j - \boldsymbol{q}\dot{\boldsymbol{q}}\delta_{ij}\right), \tag{3}$$

mit den Parametern ϵ_j. Die Zeit wird nicht transformiert, demnach transformieren die Geschwindigkeiten nach

$$\dot{q}_i' = \dot{q}_i + \frac{d}{dt}\delta q_i. \tag{4}$$

*c) [+2 BonusPkt(e)] Berechne, in erster Ordnung von ϵ_j, wie sich der Lagrangian unter dieser Transformation ändert. Das Ergebnis hat die Form

$$L\left(q_i', \dot{q}_i'\right) = L\left(q_i, \dot{q}_i\right) + g(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) + \mathcal{O}(\epsilon_i^2). \tag{5}$$

Betrachte dann die Funktion

$$f_j = m\left(m\dot{\boldsymbol{q}}^2 q_j - m\boldsymbol{q}\dot{\boldsymbol{q}}\dot{q}_j + k\frac{q_j}{q}\right). \tag{6}$$

Bestimme $\frac{d}{dt}f_j$. Folgere daraus, dass sich der Lagrangian unter der infinitesimalen Transformation nur um eine totale Ableitung ändert.

*d) [+1 BonusPkt(e)] Nutze nun das Noether Theorem um zu zeigen, dass der Laplace-Runge-Lenz-Vektor die zu dieser Symmetrie gehörende Erhaltungsgöße ist.

Aufgabe 5.3: Periheldrehung

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_periheldrehung:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe betrachten wir die Periheldrehung. Klassisch wird diese durch ein Störpotential hervorgerufen, in der Relativitätstheorie erhält man sie auf natürliche Weise durch zusätzliche Korrekturen zum Newtonschen Grenzfall.

Im Gravitationspotential der Sonne $V_0 = -k/r$ bewegen sich die Planeten auf Ellipsenbahnen. Das Perihel beschreibt den Sonnennächsten Punkt der Ellipsenbahn und ändert sich im ungestörten Gravitationspotential nicht. Betrachtet man nun aber ein zusätzliches Störpotential $V = V_0 + \delta V(r)$ so führt dies zu einer Periheldrehung.

Im ungestörten Gravitationspotential ändert sich der Winkel zwischen dem einen Perihel und dem nächsten Perihel genau um 2π. Mit der Störung berechnet sich die Winkeländerung über

$$\Delta\varphi = -2\sqrt{2\mu}\frac{d}{dl}\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}. \tag{7}$$

Dabei ist μ die reduzierte Masse und l der Betrag des Drehimpulses.

a) Überprüfe zunächst ob für $\delta V = 0$ tatsächlich $\Delta\varphi = 2\pi$ aus Gleichung (7) folgt. [1 Pkt(e)]

Hinweis: Führe die Ableitung durch und nutze dir aus dem Vorlesungsskript bekannte Substitutionen

b) Berechne die Periheldrehung $\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi$ in erster Ordnung von δV. Das Ergebnis ist [1 Pkt(e)]

$$\delta\varphi = 2\mu \frac{d}{dl} \left[\frac{1}{l} \int_0^\pi d\varphi\, r^2(\varphi)\, \delta V(r(\varphi)) \right]. \tag{8}$$

Dabei ist $r(\varphi)$ die ungestörte Lösung (also eine Ellipse).

c) Werte das Ergebnis für die Störpotentiale $\delta V = \gamma/r^3$ und $\delta V = \beta/r^2$ aus. [1 Pkt(e)]