Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

19. April 2022
SS 2022

Aufgabe 2.1: Konservative Kraftfelder

[**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_konservative_kraftfelder:km22

Übungsziel

Anhand von drei Beispielen untersuchen wir ob die gegebenen Kraftfelder konservativ sind und wiederholen damit einige mathematischen Grundlagen, die für den Rest der Vorlesung benötigt werden.

Wir beginnen mit den beiden Kraftfeldern

$$\boldsymbol{K}_1 = x^2\boldsymbol{e}_x + xy\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\,, \tag{1}$$
$$\boldsymbol{K}_2 = (y-4x)\boldsymbol{e}_x + (x-2y)\boldsymbol{e}_y. \tag{2}$$

a) [1 Pkt(e)] Untersuche, ob die Kraftfelder konservativ sind. Bestimme das skalare Potential $V_i(x,y,z)$ zu allen konservative Kraftfeldern $\boldsymbol{K}_i$.

b) [1 Pkt(e)] Welche Arbeit wird von $\boldsymbol{K}_1$ bzw. $\boldsymbol{K}_2$ bei einem Umlauf um das Einheitsquadrat $[0,1]\times[0,1]$ verrichtet?

Im Folgenden betrachten wir das Kraftfeld

$$\boldsymbol{K}_3 = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{e}_y\,. \tag{3}$$

c) [1 Pkt(e)] Fertige eine Skizze des Kraftfeldes an.

d) [1 Pkt(e)] Bestimme die Rotation von $\boldsymbol{K}_3$. Existiert ein Potential $V(x,y)$ mit $\boldsymbol{K}_3 = -\nabla V(x,y)$? Berechne für $\boldsymbol{K}_3$ das Arbeitsintegral entlang des Einheitskreises um den Ursprung explizit. Ist das Kraftfeld $\boldsymbol{K}_3$ konservativ?

Aufgabe 2.2: Eindimensionale Bewegung

[**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_eindimensionale_bewegung:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein eindimensionales Potential und sehen, wie wir mit approximativen Methoden Informationen über das Verhalten des Systems erhalten können.

Untersuche die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit der Koordinate x (in dimensionslosen Einheiten) im Potential

$$V(x) = 3x^2 - 2x^3. \tag{4}$$

a) [1 Pkt(e)] Formuliere die Bewegungsgleichung und finde die stationären Lösungen. Zeige, dass die stationären Lösungen mit den Extrema des Potentials übereinstimmen.

b) [1 Pkt(e)] Entwickle das Potential um die beiden Extrema jeweils in eine Taylor Reihe 2. Ordnung in x. Löse die approximativen Bewegungsgleichungen. Für welchen Punkt existiert eine stabile Lösung?

c) [1 Pkt(e)] Skizziere das Phasenraumdiagram für das System. Zeichne dafür die Bewegungstrajektorien in der (x, p)-Ebene für verschiedene Energien ein. Die Ergebnisse aus b) können hier sehr hilfreich sein.

Aufgabe 2.3: Eindimensionale Bewegung 2

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_eindimensionale_bewegung_2:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe leiten wir nützliche Relationen für eindimensionale Systeme her und machen uns weiter mit den Eigenschaften von Phasenraumportraits vertraut.

Die Energie eines eindimensionalen Teilchens im zeitunabhängigen Potential $V(x)$ (in dimensionslosen Einheiten) ist gegeben als

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x). \tag{5}$$

a) [1 Pkt(e)] Zeige durch das Berechnen der totalen Ableitung dE/dt, dass die Energie erhalten ist.

b) [1 Pkt(e)] Zeige, dass die Bewegungsgleichung als

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))} \tag{6}$$

geschrieben werden kann. Finde die formale Lösung zu dieser Differentialgleichung.

c) [1 Pkt(e)] Zeige, dass die Trajektorien in der (x, p)-Ebene gerade die Kurven sind, die zu einem festen Wert der Energie gehören. Skizziere die Lösungen im Phasenraumdiagramm für folgende Potentiale

$$V(x) = x^4 - 2x^2, \quad V(x) = \cos(x), \tag{7}$$

für die Energien $E = -1,\ E = -0.5,\ E = 0,\ E = 0.5,\ E = 1$ und $E = 2$.

d) [1 Pkt(e)] Für eine periodische Lösung sei die "Wirkung" $S(E)$ definiert als die Fläche, die von der Kurve mit der Energie E in der (x, p)-Ebene eingeschlossen ist. Zeige, dass die Periode der Bewegung T geschrieben werden kann als

$$T = \frac{d}{dE}S(E). \tag{8}$$