Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

19. Juli 2022
SS 2022

Aufgabe 14.1: Eindimensionale Bewegung [**Schriftlich** | 10 Pkt(e)]

ID: ex_eindimensionale_bewegung_3:km22

Ein Massenpunkt mit Masse $m = 1$ bewege sich entlang der Koordinate x (1D) in einem Potential der Form $V(x) = 2x^2 - x^4 - 1$.

a) Bestimme die Gleichgewichtspunkte und analysiere deren Stabilitätseigenschaften. [2 Pkt(e)]

b) Skizziere die Phasenraumkurven zur Energie $E = 0$ und je eine Kurve für $E > 0$ und $E < 0$. [2 Pkt(e)]

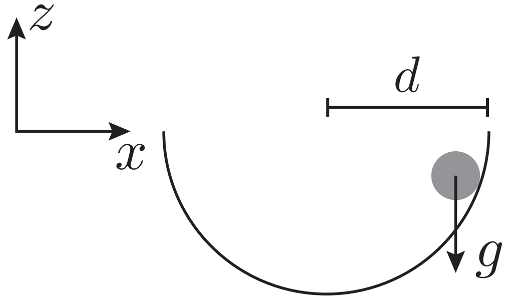
c) Schreibe die Lagrange Funktion des Systems auf. Wie lautet die Euler-Lagrange Gleichung? Leite die Bewegungsgleichung des Systems her. [2 Pkt(e)]

d) Entwickle die Bewegungsgleichung in tiefster Ordnung um den stabilen Gleichgewichtspunkt und finde die Lösung der Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingung $x = 0.1$ und $\dot{x} = 0$. [2 Pkt(e)]

e) Finde die exakte Lösung der Teilchenbewegung $x(t)$ zur Energie $E = 0$. [2 Pkt(e)]

Aufgabe 14.2: Zwangskräfte [**Schriftlich** | 14 Pkt(e)]

ID: ex_zwangskraefte:km22



Ein Zylinder mit Masse M und Radius R bewegt sich auf einer gewölbten Oberfläche reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitation. Die Oberfläche hat die Form eines Halbkreises (siehe obige Skizze) und ist bestimmt durch die Gleichung $z = -\sqrt{d^2 - x^2}$.

a) Betrachte zuerst den Fall mit einem reibungsfrei gleitenden Zylinder. Stelle die Zwangsbedingungen auf und führe eine geeignete verallgemeinerte Koordinate ein. [2 Pkt(e)]

b) Leite die Lagrange Funktion für die verallgemeinerte Koordinate her. Wie sieht die Bewegungsgleichung aus? [2 Pkt(e)]

Als Nächstes betrachte jetzt den Fall eines rollenden Zylinders der ohne Schlupf und ohne Rollreibung auf der Oberfläche rollt.

c) Leite die allgemeine Formel für das Trägheitsmoment des Zylinders in Abhängigkeit seiner Masse M (entlang seiner Symmetrieachse) her. Der Zylinder habe dabei die homogene Dichte ρ, den Radius R und die Länge l. [2 Pkt(e)]

d) Schreibe die kinetische Energie T für den rollenden Zylinder auf und bestimme die potentielle Energie V. [2 Pkt(e)]

e) Stelle die Zwangsbedingung auf für ein Rollen des Zylinders. Führe eine geeignete verallgemeinerte Koordinate ein um die Bewegung des Zylinders zu beschreiben. [2 Pkt(e)]

f) Bestimme die Lagrange Funktion in der verallgemeinerten Koordinate. [2 Pkt(e)]

g) Vergleiche die Dynamik des Zylinders im gleitenden und im rollenden Fall miteinander. Wie ändern sich die Bewegungsgleichungen? Was sind die Oszillationsfrequenzen um den stabilen Gleichgewichtspunkt bei kleinen Auslenkungen? [2 Pkt(e)]

Aufgabe 14.3: Hamilton Formalismus [**Schriftlich** | 10 Pkt(e)]

ID: ex_hamilton_formalismus:km22

Die Dynamik eines Systems mit den verallgemeinerten Koordinaten $q_1(t)$ und $q_2(t)$ sei beschrieben durch die Lagrange Funktion

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{1 + (q_1 + q_2)^2} \left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right] - V_0 \left(q_1 + q_2\right)^4 . \qquad (1)$$

a) Bestimme den kanonischen Impuls p_1, p_2 und leite die Hamilton Funktion her. [3 Pkt(e)]

b) Schreibe die Bewegungsgleichungen im Hamilton Formalismus auf. [3 Pkt(e)]

c) Bestimme die Poissonklammer $\{F, H\}$ der Messgröße $F(t) = p_1 - p_2$. Beschreibe die Rolle der Poissonklammer. [4 Pkt(e)]

Aufgabe 14.4: Relativitätstheorie [**Schriftlich** | 7 Pkt(e)]

ID: ex_relativitaetstheorie:km22

a) Beschreibe das Phänomen der Zeitdilatation. Begründe die Formel zur Zeitdilatation mittels einer Lorentztransformation. [3 Pkt(e)]

b) Betrachte einen Massenpunkt mit Masse m und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Schreibe die einzelnen Komponenten seines relativistischen Viererimpulses p^μ hin und bestimme $p_\mu p^\mu$. [2 Pkt(e)]

c) Der Massenpunkt sei zuerst in Ruhe und erfährt durch einen elastischen Stoß einen Energieübertrag von $\Delta E = 2mc^2$. Bestimme die Geschwindigkeit und den relativistischen Impuls des Massenpunktes nach dem Stoß. [2 Pkt(e)]