Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

5. Juli 2022
SS 2022

Aufgabe 12.1: Lorentztransformation

[**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_lorentztrafo:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe werden wir die Lorentztransformation am Beispiel eines beliebigen Lorentzboosts genauer betrachten. Durch Anwenden dieser Lorentztransformation leiten wir die relativistische Addition zweier Geschwindigkeiten her.

a) Zeige für einen beliebigen Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$, mit $v = |\boldsymbol{v}|$, dass die Lorentztransformation gegeben ist durch [1 Pkt(e)]

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}}{c} \\ \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v} - \gamma \boldsymbol{v} t \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Hinweis: Starte zuerst mit den Transformationen für den Anteil parallel $\boldsymbol{x}_{\|}$ und senkrecht $\boldsymbol{x}_{\perp}$ zum Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$, und leite daraus das Ergebnis für $\boldsymbol{x}$ her.

b) Nutze das Ergebnis (1), um die zugehörige 4×4 Matrixdarstellung Λ dieser Lorentztransformation zu bestimmen, sodass gilt [1 Pkt(e)]

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \,. \tag{2}$$

c) Ein Teilchen bewegt sich nun im Inertialsystem (IS) K' mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}' = \mathrm{d}\boldsymbol{x}'/\mathrm{d}t'$. Welche Geschwindigkeit $\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$ hat das Teilchen im IS K. [1 Pkt(e)]

Hinweis: Nutze $\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}t'}$.

Zwischenergebnis:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\gamma} \frac{\boldsymbol{u}' + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v} + \gamma \boldsymbol{v}}{1 + \frac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}} \tag{3}$$

d) Betrachte nun die beiden Spezialfälle $\boldsymbol{u}' \perp \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}' \parallel \boldsymbol{v}$ und gib $\boldsymbol{u}$ für diese Fälle an. Vergewissere dich in beiden Fällen, dass für Geschwindigkeiten $|\boldsymbol{u}'| < c$ und $|\boldsymbol{v}| < c$ auch die Geschwindigkeit $|\boldsymbol{u}|$ stets kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit c ist. [1 Pkt(e)]

Aufgabe 12.2: Stange in der Garage

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_stange_garage:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe werden wir ein weitverbreitetes Paradoxon genauer untersuchen. Betrachtet man eine Stange mit großer Geschwindigkeit und eine Garage mit gleicher Länge, so kann man beide Seiten der Garage gleichzeitig schließen, während die Stange hindurchfliegt, da diese aufgrund der Längenkontraktion aus dem Bezugsystem der Garage verkürzt ist. Andersherum ist jedoch auch die Garage aus dem Bezugsystem des Stabes verkürzt und der Stab kann nicht mit geschlossenen Toren in die Garage passen.

Wir betrachten eine Stange der Ruhelänge L, die sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ auf eine Garage zubewegt. Die Garage hat ebenfalls die Länge L und jeweils ein Tor am Eingang und Ausgang. Wir schließen das Tor 1, sobald das Stangenende den Garagenanfang passiert hat und öffnen Tor 2, sobald der Stangenanfang das Garagenende erreicht.

a) Im Folgenden betrachten wir zuerst das Inertialsystem (IS) K, in welchem die Garage ruht. Gib die Anfangs- und Endpunkte der Garage und der Stange im IS K an als Funktionen $x(t)$. Zu welcher Zeit wird Tor 2 geöffnet? [1 Pkt(e)]

   Hinweis: Wähle das IS K so, dass zur Zeit $t = 0$ das Stabende sich an Tor 1 an der Position $x = 0$ befindet.

b) Nun wechseln wir ins IS K', in dem die Stange ruht. Gebe die Anfangs- und Endpunkte der Garage und der Stange in K' an als Funktionen $x'(t')$. [1 Pkt(e)]

   Hinweis: Wähle auch das IS K' so, dass zur Zeit $t' = 0$ das Stabende sich an Tor 1 an der Position $x' = 0$ befindet.

Um das Paradaxon aufzulösen und das Gedankenexperiment besser zu verstehen betrachten wir vier Raum-Zeit-Punkte (t, x):

(i) Das Stangenende erreicht Tor 1, und dieses schließt: $(0, 0)$

(ii) Der Stangenanfang zur Zeit $t = 0$: $(0, L/\gamma)$

(iii) Das Tor 2 zur Zeit $t = 0$: $(0, L)$.

(iv) Der Stangenanfang erreicht Tor 2 und dieses öffnet: $(\frac{L}{v}(1 - \frac{1}{\gamma}), L)$

c) Transformiere die vier Raum-Zeit-Punkte in das IS K' zu (t', x'). [1 Pkt(e)]

d) Zeichne nun für beide IS K und K' jeweils ein Raum-Zeit-Diagramm (t über x bzw. t' über x') mit den Weltlinien der Stange und der Garage und markiere die vier Raum-Zeit-Punkte. [1 Pkt(e)]

   Interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 12.3: Zeitdilatation und Zwillingsparadoxon [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_zeitdilatation_und_zwillingsparadoxon:km22

Übungsziel

In dieser Aufgabe betrachten wir die Zeitdilatation am Beispiel von Myonen. Ausgehend davon lösen wir ein weiteres Paradoxon der speziellen Ralativitätstheorie: das Zwillingsparadoxon.

Wir betrachten zwei Myonen Scharen (A und B), die sich beide zur Zeit $t = 0$ am Punkt 1 befinden. Aus dem Inertialsystem (IS) K ruhen die Myonen der Schar A. Die Myonen der Schar B bewegen sich mit einer Geschwindigkeit $v = 0.9995c$ von Punkt 1 zu Punkt 2 (Distanz $d = 100\text{m}$). Die mittlere Lebensdauer der Myonen beträgt (im Ruhesystem des Myons) $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s.

Im IS K ist die Anzahl der Myonen in Schar A gegeben als $A(t) = A_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$ und analog ist aus dem IS K' (Ruhesystem der Schar B) die Anzahl der Myonen in Schar B gegeben als $B(t') = B_0 \mathrm{e}^{-t'/\tau}$. Zur Zeit $t = t' = 0$ sind in beiden Scharen $A_0 = B_0 = 1000$ Myonen.

a) Beschreibe die Anzahl der Myonen in Schar B aus Sicht des IS K ($B(t)$). Wieviele Myonen befinden sich in Schar A und B zum Zeitpunkt t_{P2}, wenn Schar B Punkt 2 erreicht? [1 Pkt(e)]

   Wie groß ist die effektive Lebensdauer τ_{eff} der bewegten Myonen B im ruhenden System K? Vergleiche die zurückgelegte Strecke eines Myons während der effektiven Lebensdauer mit der zurückgelegten Strecke, wenn sich Myonen nicht-relativistisch verhalten würden.

Im vorherigen Aufgabenteil haben wir gelernt, warum Myonen trotz ihrer kurzen Lebensdauer deutlich längere Strecken zurücklegen können als naiv erwartet.

Nun wollen wir uns dem Zwillingsparadoxon widmen. Dazu platzieren wir an Punkt 2 einen Magneten, der die Flugrichtung der Myonen in Schar B umkehrt, sodass Schar B zurück zu Punkt 1 fliegt. Wir gehen davon aus, dass die Zeit, die zum Umkehren der Flugrichtung benötigt wird, vernachlässigt werden kann.

b) Betrachte nun aus dem IS K die Anzahl der Myonen in Schar A und B während der kompletten Flugzeit. Wieviele Myonen sind in Schar A und B, wenn Schar B zurück an Punkt 1 ankommt? [1 Pkt(e)]

c) Abschließend betrachten wir das Ruhesystem von Schar B. Begründe warum dieses kein Inertialsystem mehr ist. [1 Pkt(e)]

   Wir definieren uns nun als Hinweg die Zeit bis direkt vor der Richtungsumkehr und als Rückweg die Zeit ab direkt nach der Richtungsumkehr. Wieviel Prozent der Myonen in Schar A und B zerfallen jeweils auf dem Hin- und Rückweg aus der Perspektive von B?

   Sind die berechneten Werte identisch mit Aufgabenteil (b)? Wenn nicht erkläre, woher die Diskrepanz kommt.