Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart

28. Juni 2022
SS 2022

Aufgabe 11.1: Erzeugende für harmonischer Oszillator [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_Erzeugende_Harmonischer_Oszillator:km22

Übungsziel

Geeignete kanonische Transformationen können die Form einer gegebenen Hamilton-Funktion drastisch vereinfachen. Als konkretes Beispiel betrachten wir hier den harmonischen Oszillator.

a) Gebe die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators (Masse m, Eigenfrequenz ω, verallgemeinerte Koordinate q) an. [1 Pkt(e)]

b) Führe eine kanonische Transformation mit der Erzeugenden [1 Pkt(e)]

$$F_2(q,P) = \frac{m}{2}\omega q \sqrt{\frac{2P}{m\omega} - q^2} + P \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\right) \tag{1}$$

aus. Wie lauten die kanonischen Gleichungen des Oszillators in den neuen Variablen? Löse diese und finde damit $Q(t)$ und $P(t)$. Bestimme auch $q(t)$ und $p(t)$ durch Rücktransformation von $Q(t)$ und $P(t)$. Skizziere die Trajektorien im (q,p) und (Q,P) Phasenraum.

c) Bestimme die zu $F_2(q,P)$ gehörende Erzeugende $F_1(q,Q)$. [1 Pkt(e)]

Aufgabe 11.2: Hamilton-Jacobi-Gleichung – Teilchen im Schwerefeld [**Mündlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_KM_Hamilton_Jacobi_freier_Fall:km22

Übungsziel

Die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung liefert die Erzeugende einer kanonischen Transformation für die die transformierten Hamilton-Funktion verschwindet. Für den freien Fall kann die Hamilton-Jacobi Gleichung noch gelöst werden und wir bestimmen die Trajektorie aus der Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung.

Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse m im Schwerefeld mit der Lagrange-Funktion

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz. \tag{2}$$

a) Bestimme die Hamilton-Funktion $H(q^\alpha, p_\alpha)$ und gebe die Hamilton-Jacobi-Gleichung an. [1 Pkt(e)]

b) Berechne mithilfe eines Separationsansatzes in x,y,z die Lösung $S = S^{(0)}(x,y,z,P_x,P_y,E) - Et$ der Hamilton-Jacobi Gleichung. [1 Pkt(e)]

c) Gebe die Bahnen $x(t), y(t), z(t)$ an, die aus der durch S vermittelten kanonischen Transformation folgen. [1 Pkt(e)]

Aufgabe 11.3: Homogene Potentiale und Skalentransformation [**Schriftlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_KM_Skalentransformation:km22

Übungsziel

Uns sind homogene Potentiale wie der harmonische Oszillator oder das Kepler-Problem bereits als wichtige Spezialfälle begegnet. In dieser Aufgabe beweisen wir den Virialsatz, der die zeitlich-gemittelte Energieverteilung für homogenen Potentiale liefert.

Betrachte ein Punktteilchen im Potential $V(r)$ wobei $V(r)$ homogen von Grad n ist, $n \neq 0$, dass heißt $V(\lambda r) = \lambda^n V(r)$. Zum Beispiel: $n = 2$ (harmonischer Oszillator), $n = -1$ (Kepler Problem). Bei Skalentransformationen $Q = \lambda q$ muss, damit die fundamentale Poissonklammer $\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$ invariant bleibt, der kanonisch konjugierte Impuls gemäss $P = \lambda^{-1} p$ transformieren. Die kinetische Energie ist also homogen von Grad -2, $T(P) = \lambda^{-2} T(p)$.

a) Zeige: Die Erzeugende von Skalentransformationen ist [1 Pkt(e)]

$$G = \sum_{\alpha=1}^{N} q^\alpha p_\alpha \tag{3}$$

Verwende dazu $\lambda = e^s$ und betrachte den von G erzeugten Fluss

$$\frac{\partial q^\alpha}{\partial s} = \{q^\alpha, G\} \qquad \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} = \{p_\alpha, G\}. \tag{4}$$

b) Sei $q(t)$, $p(t)$ Lösungen der Hamiltonischen Bewegungsgleichungen. Zeige, dass $Q(t)$, $P(t)$ *keine* Lösungen des Problems sind, d.h. Skalierung ist keine Symmetrie der Hamilton-Funktion, $dH/d\lambda \neq 0$ und G ist keine Erhaltungsgröße. [1 Pkt(e)]

c) Zeige, dass [1 Pkt(e)]

$$\{H, G\} = -2T + nV \tag{5}$$

sowohl mit Hilfe von $dH/ds = \{H, G\}$, mit $\lambda = e^s$, als auch durch direkte Berechnung der Poissonklammern.

d) Betrachte *gebundene* Bahnen (q, p sind beschränkt) und definiere zeitliche Mittelwerte [1 Pkt(e)]

$$\langle F \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(q(t), p(t), t) dt. \tag{6}$$

Zeige, dass aus der Aufgabe c) der Virialsatz

$$2\langle T \rangle = n \langle V \rangle \tag{7}$$

folgt. H ist erhalten und die totale Energie E. Zeige

$$\langle T \rangle = \frac{n}{n+2} E, \qquad \langle V \rangle = \frac{2}{n+2} E, \qquad (n > -2). \tag{8}$$

Betrachte als Spezialfälle das Kepler-Problem und den harmonischen Oszillator.