Prof. Dr. Hans-Peter Büchler
*Institut für Theoretische Physik III, Universiät Stuttgart*

21. Juni 2022
SS 2022

---

## Aufgabe 10.1: Poisson-Klammer

[**Schriftlich** | 3 Pkt(e)]

ID: ex_poissonklammer:km22

**Übungsziel**

In dieser Aufgabe beweisen wir Eigenschaften der Poisson-Klammer und machen uns mit dieser vertraut.

a) Zeige die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer: [ 1 Pkt(e) ]

- Produktregel

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \tag{1}$$

- Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \tag{2}$$

b) Berechne $\{f, q_i\}$ und $\{f, p_i\}$. Was folgt daraus für die fundamentalen Poisson-Klammern $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$ und $\{q_i, p_j\}$? [ 1 Pkt(e) ]

c) Betrachte einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse $m$ und Eigenfrequenz $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$. Stelle die Hamiltonfunktion H auf und zeige mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass der Tensor zweiter Stufe [ 1 Pkt(e) ]

$$T_{ij} = p_i p_j + (m\omega)^2 q_i q_j \tag{3}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

## Aufgabe 10.2: Teilchen im Magnetfeld - Kanonische Transformation

[**Mündlich** | 4 Pkt(e)]

ID: ex_Teilchen_im_Magnetfeld_Kanonische_Transformation:km22

**Übungsziel**

In dieser Aufgabe betrachten wir wie sich mit Hilfe von kanonischen Transformationen die Lösung der Bewegungsgleichung vereinfacht.

Wir betrachten ein Teilchen in der x-y Ebene mit einem Magnetfeld in z-Richtung. In Problem 9.3 haben wir gezeigt, dass die Hamiltonfunktion für ein Teilchen (Masse $m = 1$, Ladung $q = 1$) im elektromagnetischen Feld durch

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A})^2 + \phi \tag{4}$$

gegeben ist. Mit $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ und $\phi = 0$ erhält man den Fall eines Magnetfelds in z-Richtung ohne eletrisches Feld. Die Hamiltonfunktion ist dann

$$H = \frac{1}{2}\left[\left(p_1 + \frac{B}{2}q_2\right)^2 + \left(p_2 - \frac{B}{2}q_1\right)^2\right]. \tag{5}$$

Wir arbeiten im Folgenden mit dieser.

a) Gegeben sei die Transformation [ 1 Pkt(e) ]

$$\begin{aligned} q_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{B}}\left(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2\right), \quad p_1 = \tfrac{\sqrt{B}}{2}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2\right), \\ q_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{B}}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2\right), \quad p_2 = \tfrac{\sqrt{B}}{2}\left(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Zeige, dass die Hamiltonfunktion in diesen Variablen die Form $\tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = \omega P_1$ hat und bestimme $\omega$.

b) Zeige, dass für die Poisson-Klammern $\{q_i, q_j\}_{Q,P} = 0$, $\{q_i, p_j\}_{Q,P} = \delta_{i,j}$ und $\{p_i, p_j\}_{Q,P} = 0$ gilt. [ 1 Pkt(e) ]

c) Zeige dass aus dieser Bedingung folgt, dass die Poisson-Klammern invariant unter der Transformation sind, dass also für Phasenraumfunktionen $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ und $g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ die Gleichung [ 1 Pkt(e) ]

$$\{f, g\}_{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}} = \{f, g\}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}}$$

gilt.

Für diese (zeitunabhängige) Transformation bedeuten die Resultate der beiden vorherigen Rechnungen, dass die Transformation kanonisch ist. Wir können nun also die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen nutzen.

d) Stelle die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen auf und löse sie für allgemeine Anfangsbedingungen. Gib die Lösung auch in den ursprünglichen Variablen an. [ 1 Pkt(e) ]

## Aufgabe 10.3: Poisson-Klammern des Drehimpulses [**Mündlich** | 1 Pkt(e)]

ID: ex_drehimpuls_poisson_klammern:km22

**Übungsziel**

Wir betrachten den Drehimpuls und sehen, dass dessen Poisson-Klammern genau der Drehimpulsalgebra gehorchen. Diese Algebra wird uns in der Quantenmechanik wieder begegnen.

Wir betrachten ein Teilchen der Masse $m$ in einem Zentralpotential $V(\boldsymbol{x})$ in drei Dimensionen. Der Lagrangian ist gegeben durch $L = T - V$.

Bestimme die Hamiltonfunktion. Drücke den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ über die kanonischen Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{p}$ aus und zeige

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

die "Vertauschungsrelationen" des Drehimpulses.